

## 分数の正多角形と対数螺旋の表出効果

# The Effects of Expression in Fractional Regular Polygon and Logarithmic Spiral

吉田美穂子

YOSHIDA Mihoko

キーワード：分数の正多角形 対数螺旋 自己相似

Key words : Fractional Regular Polygon , Logarithmic Spiral , Self-Similarity

### 要旨

図形を回転するとその軌跡は円となるが、等しい倍率で拡大もしくは縮小しながら回転するとその軌跡は螺旋となる。正方形の黄金比を用いた回転を基本として CAD により作図を行う。様々な分数の正多角形の外心を中心としてその外角の角度分を、黄金比率の割合で拡大しながら回転させてその軌跡の円弧を繋げていく。

作図から得られた対数螺旋を比較した結果、黄金角である約  $137.5^\circ$  に近い外角を持ち、分母・分子が 1 つ飛びのフィボナッチ数で現わされる正  $8/3$  角形、正  $13/5$  角形が最もバランスの良い効果的な現れ方をすることを確認した。また、その時の対数螺旋は  $r = e^{0.20051\theta}$  の式で表され、螺旋の接線と中心からの線とがなす角度は約  $78.7^\circ$  であった。

この表出効果を予め計算した、建築・インテリアでのデザインへの応用・転用が望まれる。

### Summary

Rotate the figure and the trajectory becomes a circle. Rotate while expanding or contracting by the same magnitude and the trajectory becomes a spiral. Rotating using the golden ratio of a square is basically drafting through CAD. Rotate while expanding the external angle of the circumcenter of various fractional regular polygons by the golden ratio connects the trajectory of the arc.

Comparison with the logarithmic spiral generated from drafting, confirmed an external angle of close to the golden angle of about  $137.5^\circ$ , demonstrating the best balanced effect of  $8/3$  cornered polygon and  $13/5$  cornered polygon displaying the inverted Fibonacci sequence for the denominator/numerator. The logarithmic spiral can expressed by the formula  $r = e^{0.20051\theta}$ , and the angles of the lines connecting to the center of the spiral were about  $78.7^\circ$ .

It is hoped that the predicted effect of this expression will be applied and used in design for construction and interiors.

#### 1. 研究の目的と背景

##### 1.1. 同じ形が集まると螺旋が見える

正六角形を敷き詰めると図 1 のように対数

螺旋が見える。また、図 2 のように、2 つの底辺が  $72^\circ$  の二等辺三角形（黄金三角形と呼ぶ(マリオ・リヴィオ,2012)）の相似形を集

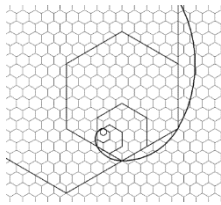


図1 合同図形の集合に現れる対数螺旋

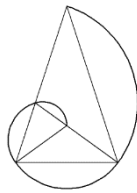


図2 相似図形の集合に現れる対数螺旋

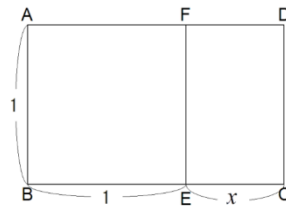


図3 黄金分割された長方形から黄金比を求める

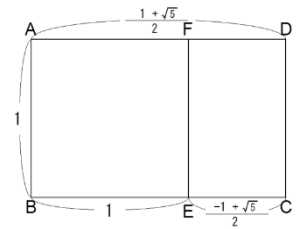


図4 黄金分割された長方形の辺の長さ

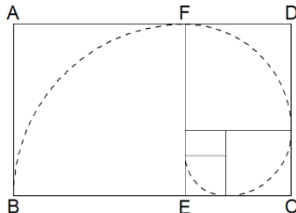


図5 正方形の黄金分割螺旋の作図

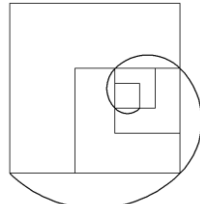


図6 正方形の黄金分割螺旋の作図2

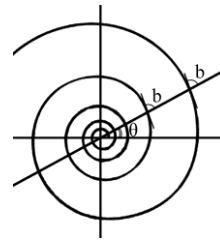


図7 対数螺旋は等角螺旋

めても対数螺旋が現れる。なお、本稿での作図はすべて CAD ソフト（CAD ソフト「VectorWorks2013」 エーアンドエー株式会社）を用いたものである。

## 1.2. 黄金比と黄金分割螺旋

黄金比の値を正確に求めるために「長方形から正方形を切り取ったとき、残った長方形ももとの長方形と相似になるような長方形」を考える(佐藤修一, 2003)。

図3のように黄金分割された長方形を考えて、黄金比を求める。まず、 $AB = BE = 1$ とし、長方形 ABCD とこの長方形から正方形 ABEF を切り取ってできる長方形 ECDF が相似であるとして、 $EC = x$  とおく。このとき、 $AB : BC = EC : CD$  であるので、 $1 : (1 + x) = x : 1$

よって、 $x^2 + x - 1 = 0 \quad (x > 0)$

となり、 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

したがって、長方形の長辺 BC (= AD) の長さは

$$BC = BE + EC = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となり、各辺の長さは図4の通りとなる。

この黄金分割の長方形の長辺と短辺の長さの比、即ち、黄金比は  $\phi$  (ファイ) で表され、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = 1.61803398875 \dots$$

となり、この  $\phi$  の逆数  $\phi^{-1} = 0.61803398875$

… も黄金比と言われている。

また、図5のように図4に円を描いて作図したものが正方形の黄金分割螺旋となる。

ここで、この正方形の黄金分割螺旋の式を求める。

図5の対数螺旋は図6のように  $90^\circ$  (ラジアンでは  $\pi/2$ ) 毎に  $\phi$  倍した対数螺旋の方程式を求めることになる(図6の作図法は図11参照)。

本来、対数螺旋は作図のように急に大きくなりすぎずになめらかに拡大されるため、円ではなく、曲線で描かれるもので、極座標では  $r = ke^{(\cot b)\theta}$  で表わされる ( $e$  は自然対数の底のことで  $2.7182818284 \dots$ 。  $\theta$  は中心の角度(ラジアン)。  $b$  は曲線の接線と中心からの線とがなす角度で、常に一定になることから対数螺旋は等角螺旋とも呼ばれる(図7)。なお、 $b$  の値で曲線の曲がり方が決まり、値が小さいと対数螺旋は大きく開く)。拡大・縮小しても対数螺旋の形状は変わらないので、 $k = 1$  とする。

$$\theta \cot b = \ln r$$

$$\cot b = (1 / \theta) \ln r$$

$\theta$  が  $\pi / 2$  回ごとに  $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$  ずつ拡大していくので

$$\cot b = (2 / \pi) \times \ln(\phi)$$

$\phi = 1.61803398875$  を代入すると

表1 対数螺旋の式と角度b

図形名称	外角		倍率	cotb	b 度数
	度数	ラジアン			
黄金三角形	108	$3\pi/5$	$\phi$	0.255	75.7
正方形	90	$\pi/2$	$\phi$	0.306	73.0
正六角形	60	$\pi/3$	2	0.662	56.5

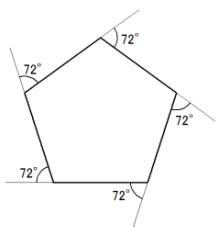


図8 正五角形と外角

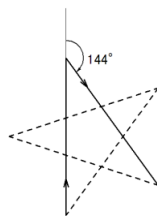


図9 正5/2角形と外角

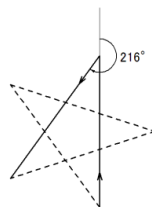


図10 正5/3角形と外角

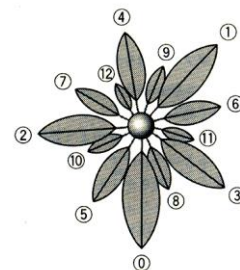


図11 佐藤修一による黄金植物の葉の配列の模式図

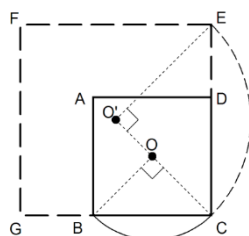


図12 正方形を黄金比率で拡大する時にできる

螺旋の作図法

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \ln(1.61803398875) = 0.30634896253$$

よって、対数螺旋の式は  $r = e^{0.306\theta}$

また、 $\cot b = 0.30634896253$  のとき

$b = \operatorname{arccot} 0.30634896253$  であるから、

$b = 72.96760887004^\circ$  およそ  $73.0^\circ$  となる。

ここで、図1と図2の対数螺旋の式も求める。

図1では正六角形が外角の  $60^\circ$  (ラジアンでは  $\pi/3$ ) 毎に2倍になるときの対数螺旋となる。

$$\text{結果は } r = e^{0.662\theta} \quad b = 56.5^\circ$$

図2では頂点の外角の  $108^\circ$  (ラジアンでは  $3\pi/5$ ) 毎に  $\phi$  倍となる対数螺旋で結果は

$$r = e^{0.255\theta} \quad b = 75.7^\circ \quad \text{となる。}$$

以上をまとめると表1となる。

### 1.3. 分数多角形

ここで分数の正多角形とは何かを考える。

まず、正五角形の外角は  $360^\circ \div 5$  で  $72^\circ$  であるが、正5/2角形の外角は

$360^\circ \div (5/2)$  で  $144^\circ$  となる。では

正5/3角形はどうかを考える。図8は正五角形の外角を表わし、図9は正5/2角形の外角を表わしている。図10は正5/3角形が正5/2角形と逆向きに作図されることを示したものである。

上村文隆(2007)によると  $m \geq 3$  の場合で、 $m$  と  $n$  は約分できない数のとき、「正  $m/n$  角形」は以下のように定義される。

上村文隆(2007)によると  $m \geq 3$  の場合で、 $m$  と  $n$  は約分できない数のとき、「正  $m/n$  角形」は以下のように定義される。

- (1) 1つの外角を  $360 n/m$  度とする。
- (2) その角度で、同じ長さの辺を  $m$  個つくる。
- (3) ただし、 $m > n$  のときは、 $m/n = m/(m - n)$  とみなし、 $n$  と  $(m - n)$  の小さい方をとる。

(4)  $m < n$  のときは、 $n$  から  $m$  を引いて分母を分子よりも小さくする。

よって、 $3/10$  角形は  $3/(10 - 3) = 3/7$  角形で、 $3/(7 - 3) = 3/4$ 、さらに  $3/4 = 3/1$  で三角形ということになる。

以下、この定義に従って作図する。

#### 1.4. 効果的な出現

本稿での「効果的な出現」の定義に関して、佐藤修一(2003)の「葉序」の考えを参考にした。即ち、植物の葉が茎につく形態には一定の秩序があり、これを植物形態学では「葉序」といい、葉序には太陽の光を少しでも有利に受けることができるように特別に配慮されている形跡があり、「隣り合う葉が互いに重ならない」という植物が獲得した自然のメカニズムをあげている。隣り合う葉が可能な限り重ならないように、黄金比を用いて考案された究極的に進化した植物「黄金植物」の葉序の模式図が図 11 である。

本稿では分数の正多角形を外角で回転させながら黄金比の倍率で拡大させ、さらにできるだけ隣り合う図形がお互いに重ならないように出現している図形は非常に効果的に自己を表現していることになると考えた。また、そのような分数多角形の効果的な表出形態は造形作品や絵画等を制作する上で効果的に作品を見せるという観点からも、その形態の追究は非常に重要である。

また、葉序の考えはこれまでに明らかになっているが、図形の効果的な表出についての論文はない。そこで図形の中で特に分数多角形を取り上げ、その外角で回転させながら黄金比で拡大させ、その出現効果を探ることを目的とする。葉序の動力学的な出現方法を図形に応用し、葉序の持つ自然のリズムを刻みながらわれわれと一緒に共存するデザインはわれわれに居心地のよい空間を提供することになる。われわれとともに成長し、快適に共生できるデザイン表現の根底を究明する。

## 2. 研究の方法

3 角形から 13 角形までの様々な分数の正多角形の外心でその外角の角度分を回転させて円弧を描き、黄金比の倍率に拡大させた一辺を持つ分数の正多角形を作図し、さらにその正多角形の外心から外角の角度分を回転させて円弧を描く。同じ操作を繰り返しながらその円弧を繋げていき、作図した回転の軌跡である対数螺旋の式と角度  $b$  を求めて比較し、効果的な見せ方-本稿では、図形はできるだけ面が重ならないように現れ、かつ形状に偏りがなく、対数螺旋の極を軸として回転しながらあらゆる方向に均一に出現する-という点に着目して検討をおこなう。なお、朝山秀一(1997)を参考にし、4 回程度の繰り返しに留めた。

具体的な作図具体例として図 6 で示した正方形を用いて説明する。図 12 のように正方形 ABCD の外心  $O$  から  $\angle BOC$  (正方形の外角の角度である  $90^\circ$ ) を中心角として  $\widehat{BC}$  を描き、辺  $CD$  を  $\phi$  倍した  $CE$  を一辺とする正方形 CEF $G$  を描く。同様に、正方形 CEF $G$  の外心  $O'$  から  $\angle CO'E$  (正方形の外角の角度である  $90^\circ$ ) を中心角として  $\widehat{CE}$  を描いていく。このように回転の中心となる点を取り替えながら円弧を描く操作を 4 回繰り返し、合計 5 個の円弧を繋げて螺旋に近い曲線を描いていくという手法で、図 5 の作図法を参考にして近似的な螺旋を作図していくという独自の作図法を用いた。

## 3. 研究結果

### 3.1. 分数の正多角形の外角

分数の正多角形の外角を度数で示したものが表 2 である。なお、 $180^\circ$  の外角は作図できないため灰色に塗りつぶし、塗りつぶしを結んだ太線を境に、表の左下と右上は逆向きに作図されることになる(図 9, 図 10 参照)。

### 3.2. 分数の正多角形の形状

ここで分数の正多角形を上村文隆の定義に

表2 分数の正多角形と外角(度数)

		分 母							
		1	2	3	4	5	6	7	8
分 子	3	120	240	—	—	—	—	—	—
	4	90	180	270	—	—	—	—	—
	5	72	144	216	288	—	—	—	—
	6	60	120	180	240	300	—	—	—
	7	51	103	154	206	257	309	—	—
	8	45	90	135	180	225	270	315	—
	9	40	80	120	160	200	240	280	320
	10	36	72	108	144	180	216	252	288
	11	33	65	98	131	164	196	229	262
	12	30	60	90	120	150	180	210	240
	13	28	55	83	111	138	166	194	222

表3 分数の正多角形

		分 母							
		1	2	3	4	5	6	7	8
分 子	3	3	3	—	—	—	—	—	—
	4	4	2	4	—	—	—	—	—
	5	5	5/2	5/2	5	—	—	—	—
	6	6	3	2	3	6	—	—	—
	7	7	7/2	7/3	7/3	7/2	7	—	—
	8	8	4	8/3	2	8/3	4	8	—
	9	9	9/2	3	9/4	9/4	3	9/2	9
	10	10	5	10/3	5/2	2	5/2	10/3	5
	11	11	11/2	11/3	11/4	11/5	11/5	11/4	11/3
	12	12	6	4	3	12/5	2	12/5	3
	13	13	13/2	13/3	13/4	13/5	13/6	13/6	13/5

従って、分類したものが表3である。こちら  
も表の左下と右上は逆向きに作図される。

### 3.3 分数の正多角形を黄金比率で拡大する時 にできる螺旋の作図

分数の正多角形の外角と同じ回転角で回転  
しながら黄金比率に従って拡大していった時  
に軌跡として現れる螺旋の作図結果を表4に  
示す。以下、この螺旋を本稿では黄金分割螺  
旋と呼ぶ。また、表4の左下と右上は逆向き  
の作図結果である。

### 3.4. 分数の正多角形に現れる黄金分割螺旋 の式と角度 b



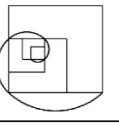
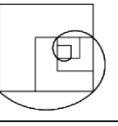



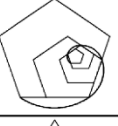
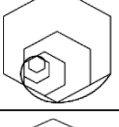
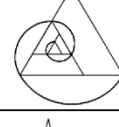
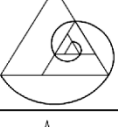
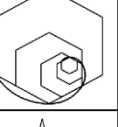
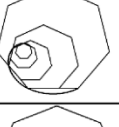

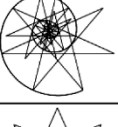

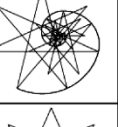

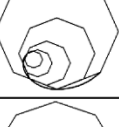
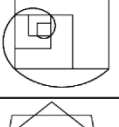
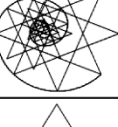
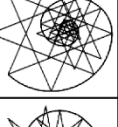
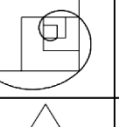

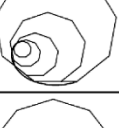

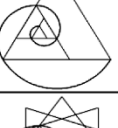
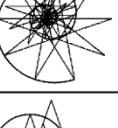

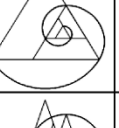
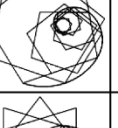


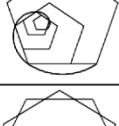
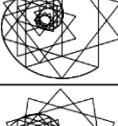


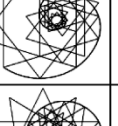
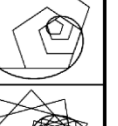

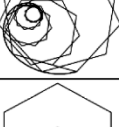
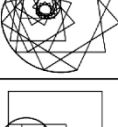
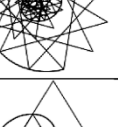
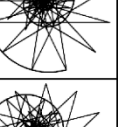
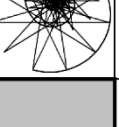
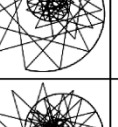
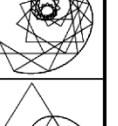

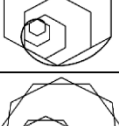

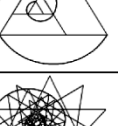
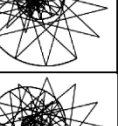
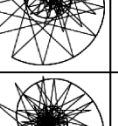
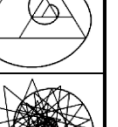






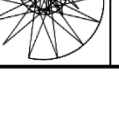

表5には表4の分数の正多角形が外角の角

度で回転する際に生じる黄金分割螺旋の式  
( $r = e^{(\cot b)\theta}$ )と角度 b (図7参照)を計算した  
結果である。

## 4. 考察

分数の正多角形の中で一番角が突き出て尖  
っているのは $[(2n+1)/n]$ 角形であり、  
5/2角形は五芒星と呼ばれる星型である。  
また正方形の描く黄金分割螺旋は、従来考え  
られてきた静的な均斉概念と区別して動的均  
斉理論の基本観念である対数螺旋と正方形が  
結合したものとしてハンビッジにより「旋廻  
方形矩形」の名を与えられた(柳亮, 2001)。そ  
の現れ方について考えてみる。

表4 分数の正多角形を黄金比率で拡大しながら外角と同じ角度で回転した時の作図と軌跡の黄金分割螺旋

		分				母			
		1	2	3	4	5	6	7	8
分	3			—	—	—	—	—	—
	4		2		—	—	—	—	—
	5					—	—	—	—
	6			2			—	—	—
	7							—	—
	8				2				—
	9								
	10					2			
	11								
	12						2		
	13								

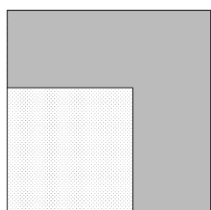


図13 正方形を90°回転させ、 $\phi$ 倍した時の現れ方

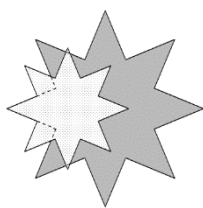


図14 正8／3角形を135°回転させ、 $\phi$ 倍した時の現れ方

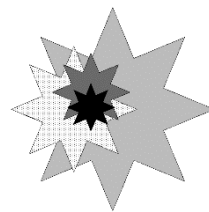


図15 図14の作業を3度繰り返した時の現れ方

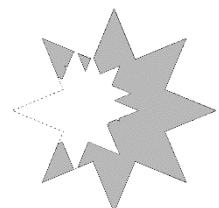


図16 図15の上3枚の多角形で一番下の多角形を切り欠いた状態



表5 分数の正多角形の外角と角度b

図形名称	外角		倍率	cotb	b 度数
	度数	ラジアン			
正三角形	120	$2\pi/3$	$\varphi$	0.230	77.1
正方形	90	$\pi/2$		0.306	73.0
正五角形	72	$2\pi/5$		0.383	69.1
正5/2角形	144	$4\pi/5$		0.191	79.2
正六角形	60	$\pi/3$		0.460	65.3
正七角形	51	$2\pi/7$		0.536	61.8
正7/2角形	103	$4\pi/7$		0.268	75.0
正7/3角形	154	$6\pi/7$		0.179	79.9
正八角形	45	$\pi/4$		0.613	58.5
正8/3角形	135	$3\pi/4$		0.204	78.5
正九角形	40	$2\pi/9$		0.689	55.4
正9/2角形	80	$4\pi/9$		0.345	71.0
正9/4角形	160	$8\pi/9$		0.172	80.2
正十角形	36	$\pi/5$		0.766	52.6
正10/3角形	108	$3\pi/5$		0.255	75.7
正十一角形	33	$2\pi/11$		0.842	49.9
正11/2角形	65	$4\pi/11$		0.421	67.2
正11/3角形	98	$6\pi/11$		0.281	74.3
正11/4角形	131	$8\pi/11$		0.211	78.1
正11/5角形	164	$10\pi/11$		0.168	80.4
正十二角形	30	$\pi/6$		0.919	47.4
正12/5角形	150	$5\pi/6$		0.184	79.6
正十三角形	28	$2\pi/13$		0.996	45.1
正13/2角形	55	$4\pi/13$		0.498	63.5
正13/3角形	83	$6\pi/13$		0.332	71.6
正13/4角形	111	$8\pi/13$		0.249	76.0
正13/5角形	138	$10\pi/13$		0.199	78.7
正13/6角形	166	$12\pi/13$		0.166	80.6

表6 分数の正多角形の効果的出現順位

図形名称	表出割合(%)	図形の 内角	全く重なる出現	尖った形状	効果的出現	順位
正三角形	61.8	60	✓			
正方形	61.8	90	✓			
正五角形	61.8	108	✓			
正5/2角形	68.3	36		✓		
正六角形	61.8	120	✓			
正七角形	61.6	129	✓			
正7/2角形	69.4	26		✓		
正7/3角形	68.8	26		✓		
正八角形	61.7	135	✓			
正8/3角形	65.4	45			○	1
正九角形	61.8	140	✓			
正9/2角形	62.6	100			○	7
正9/4角形	68.9	20		✓		
正十角形	61.8	144	✓			
正10/3角形	63.3	72			○	4
正十一角形	61.7	147	✓			
正11/2角形	62.1	115			○	10
正11/3角形	62.7	82			○	6
正11/4角形	64.0	49			○	3
正11/5角形	72.3	16		✓		
正十二角形	61.8	150	✓			
正12/5角形	65.4	30		✓		
正十三角形	61.9	152	✓			
正13/2角形	62.1	125			○	9
正13/3角形	62.5	97			○	8
正13/4角形	63.0	69			○	5
正13/5角形	64.1	42			○	2
正13/6角形	69.8	14		✓		

#### 4.1. 正方形と正8/3角形が回転する時の相似図形の現れ方の検討

図13では正方形の2辺が重なって拡大されていくのに対し、図14では図形同士がずれながら拡大されていくのが分かる。よって、図形が全く重なって出現するのは効果的ではないと言え、逆に、図形はなるべく下の図形と重ならないように出現する方がより効果的であると考え、図15での操作の後、図16のように上3枚が下の図形に落とす影を、CADを用いて切り欠いた。切り欠かれて残った部分が元の図形に占める割合を算出し、表6に示した。この割合が高いほど効率よく表出していることになる。また、それぞれの図形の内角が星形の正5/2角形（内角 $36^\circ$ ）よりも小さい図形は尖り過ぎた図形と判断し、効果的な出現をする分数の正多角形の対象から除外した。理由は尖り過ぎた図形は図17で見るように上にある図形により細かく分解されて出現することが多いからである。その結果、効果的な出現をしている図形は10種類あることになり、表出割合の多い順に順位を付けて示した。

順位が1位である正8/3角形に関しては

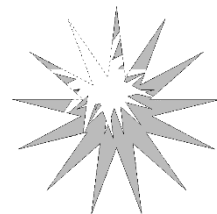


図17 正13/6角形において上3枚の多角形で一番下の多角形を切り欠いた状態

図形の内角が $45^\circ$ 、即ち、外角 $135^\circ$ で回転する時、図形の重なりが少なくなるように効果的に拡大されていることが分かった。なお、2位は正13/5角形で外角は $138^\circ$ である。そこでこれらの外角の意味を調べた。

#### 4.2. フィボナッチ数と黄金角

表4で相似図形が重なることなく現れる図形は正8/3角形、正13/5角形があり、4回程度の回転数であればその相似図形が重なって出現することが少ない出方と言える。ここで正8/3角形、正13/5角形の数字に注目する。

##### (1) フィボナッチ数列と黄金角

正8/3角形、正13/5角形には3, 5, 8, 13という数字が含まれる。これはフィボナッチ数列と呼ばれるもので、

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …となり、規則正しく1つ飛びのフィボナッチ数が現れているので、正13/5角形の次は正21/8角形ということになる。フィボナッチ数の隣り合う項の比の極限は $\phi$ になるので、1つ飛びのフィボナッチ数の比 $F_n / F_{n-2}$ はフィボナッチ数列の式 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ を $F_{n-2}$ で割って

$$F_n / F_{n-2} = (F_{n-1} / F_{n-2}) + 1 = \text{約}\phi + 1 = \text{約}2.618\cdots$$

よって、外角は $360 \div 2.618 = \text{約}137.5^\circ$ となる。この角度は黄金角と呼ばれるもので、前述した植物の葉や芽が茎の周りを回転しながら順番に出てくる葉序で最も進化した植物の開度である。植物が光合成を行うためにバランスよく、また、効率の良い現れ方をしているとすると、正8/3角形、正13/5角形はできるだけ上の図形が重ならないように予め計算されたバランスの良い表出方法を取っていることになる。

(2) フィボナッチ数列と黄金分割螺旋の関係

表5を基準にして、分数の正多角形が外角の角度(=a)で回転する際に生じる黄金分割螺旋の一般式を求める。フィボナッチ数列が近似的に $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ と現され、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = e^p$ と置く

$$p = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = 0.481211825\cdots$$

よって、黄金分割螺旋の一般式は

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{0.4812a\theta} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(3) 外角が黄金角の時の角度b

拡大しても縮小しても螺旋の形状が変わらないことから①の式は $r = e^{0.4812a\theta} \cdots \cdots \textcircled{2}$ となる。

②でaが黄金角である約 $137.5^\circ$ (ラジアンでは $(3 - \sqrt{5})\pi$ )の時、黄金比率で拡大しながら回転する場合の軌跡である黄金分割螺旋の式は $\cot b = 0.200507999\cdots$ となり、 $r = e^{0.20051\theta} \cdots \cdots \textcircled{3}$ で表され、 $b = 78.66\cdots$ となる(図7参照)。

即ち、1つ飛びのフィボナッチ数をもつ正

多角形は黄金角で黄金比の割合で拡大しながら回転する時、その軌跡である黄金分割螺旋において、螺旋の接線と中心からの線とがなす角度bはおおよそ $78.7^\circ$ で、最もバランスの良い効果的な現れ方をすることになる。

#### 4.3. デザイン分野への有用性

本稿の正多角形図形の変形を葉序の動力学的な出現になぞらえて考える場合、その要因を知る最高の手がかりは、むしろ植物ではなく、物理学の実験-ステファン・ドゥアディとイヴ・クーデによるもの(1992~1996年)-から得られる(マリオ・リヴィオ, 斉藤隆央, 2012)。

即ち、『ふたりは、皿にシリコンオイルを張り、中心より縁に近いほど強くなるような磁場のなかに置いた。そして、微小な棒磁石の働きをする磁性流体のしずくを、皿の中心に一定の時間間隔で垂らす。すると微小な磁石は、互いに反発しながら、磁場の強度勾配によって半径方向へ押し出される。ドゥアディとクーデは、振動しつつも、たいていはしずくの間隔が黄金角になるらせんに収束するパターンを見出した。一般に物理的な系は、エネルギーが最小の状態に落ち着く。ならば葉序は、互いに斥けあう芽からなる系において、エネルギーが最小の状態を表しているにすぎないと考えられる。なんらかの養分濃度がとくに高い場所に葉が生えるなどといったモデルもありうるが、それでも間隔は黄金角に等しくなる傾向がある。…(中略)…古典的著作「生命の曲線」(1914)で、イギリスの作家・編集者シオドア・アンドレア・クックは、自然や芸術に(対数らせんにかぎらず)らせんが現れている幾多の例を挙げている。つる植物・人体、階段、マオリ族の入れ墨といったさまざまなものに見られるらせんを論じているのだ。その本を書いた動機について、クックはこう記す。「らせんの形成にかんす



るこれらの章が存在する理由は、調査結果が面白くも美しい以外に必要な」…（中略）…芸術家も対数らせんの美しさを見逃さなかった。』としてレオナルド・ダ・ヴィンチの「レダと白鳥」のための習作と「大洪水」のための一連のスケッチを挙げ、さらに『20世紀にデザイナー・イラストレーターとして活躍したエドワード・B・エドワーズは、対数らせんにもとづく装飾図案を何百も考え出した。その多くは、著書「動的対称性をもつパターンとデザイン」に紹介されている』として対数螺旋と芸術との関わりを述べている。

以上から、正多角形の動力的な出現方法を具体的な作図法を用いて調べることにより、「静」から「動」へのデザイン生成プロセスを体験でき、生物の成長に見る自然のリズムを持つ図形の出現は、より身近にわれわれと共生するデザインとなり、その汎用・転用が期待されるものと考ええる。

## 5. まとめと展望

分数の正多角形をその外角の角度で黄金比率の割合で拡大しながら回転させて作図した結果、黄金角である約  $137.5^\circ$  に近い外角を持つ、分母・分子が1つ飛びのフィボナッチ数で現わされる正  $8/3$  角形、正  $13/5$  角形が最もバランスの良い効果的な現れ方をすることを確認した。また、その時の軌跡である対数螺旋は  $r = e^{0.20051\theta}$  の式で表され、その時の螺旋の接線と中心からの線とがなす角度は約  $78.7^\circ$  である。

今回の結果から最も小さな値のフィボナッチ数である正  $8/3$  角形（正確には正  $5/2$  角形が最も小さいが尖り過ぎた図形とみなし、また、外角が  $144^\circ$  と  $137.5^\circ$  からかなり離れている点で例外として取り扱う）を基準として、その表出効果を予め計算したデザインを考えていきたい。それには過去の芸術作品での応用例を具体的に調べ、その表出方法を明

らかにする必要がある。そのことにより建築・インテリアにおける応用、転用が可能になると考える。

芸術作品への表出効果の現れを探り、紀要論文(吉田美穂子, 2015)と口頭発表(吉田美穂子, 2015)で発表した。沢山のご意見を参考に、さらに考察を重ねて、総括的な論文としてまとめていきたいと考えている。

## 謝辞

本研究を進めるに当たり、大阪市立大学の釜江哲朗氏に数学に関する助言をいただきました。また、研究協力者である梅花女子大学伊藤泰子氏・加藤善彦氏・野田英行氏には多方面でご助力をいただきました。ここに記して感謝いたします。

なお、本研究は JSPS 科研費 25350035 の助成を受け、報告するものです。

## 文献リスト

1. 朝山秀一 (1997). フラクタルとカオスの建築デザインと制御への応用. 日本ファジィ学会誌, 9(2), 198-205,
2. マリオ・リヴィオ, 斉藤隆央 (2012). 黄金比はすべてを美しくするか?, 東京都千代田区神田多町:早川書房.
3. 佐藤修一 (2003). 自然にひそむ数学, 東京都文京区音羽:講談社,
4. 上村文隆 (2007). 生き物たちのエレガントな数学, 東京都新宿区市谷左内町:技術評論社,
5. 柳亮 (2001). 黄金分割, 東京都渋谷区猿楽町:美術出版社.
6. 吉田美穂子 (2015). 分数の正多角形と黄金分割螺旋. 梅花女子大学文化表現学部紀要, 11, 1-12.
7. 吉田美穂子 (2015). 分数多角形と対数螺旋のフォルム. 日本デザイン学会第4支部平成26年度 研究発表会概要集, 06-07.