

# 拡張セル・オートマトンにおける再帰的近傍推定の正確性<sup>1</sup>

## Accuracy of Recursive Estimation of Neighbors in Extension of Cellular Automata

香山 喜彦

KAYAMA Yoshihiko

**要旨** 本研究は、正方格子上に配置されたセルで構成され、すべてのセルが同時に時間発展する標準的なセル・オートマトン (CA) に、近傍セルの状態を推定する再帰的なアルゴリズム (再帰的近傍推定という) を導入して拡張された CA について議論する。拡張された CA のセルは、個別に知覚領域を属性として持つことができ、その大きさは、各セルが取得できる情報量の指標となる。すなわち、多要素系における情報処理とパターン形成との関連を、CA の枠内で議論できる可能性が導かれる。本稿では、この拡張を 1次元2状態3近傍ルール (ECA) および Conway のライフゲームを含む2次元2状態8近傍外部総和型ルール (Life-like CA) に適用し、再帰的近傍推定の正確性を求めることで、各拡張 CA ルールにおける情報処理の効率性を評価し、知覚領域が大きくなるとともに情報処理の効率も向上し、複雑なパターン形成も伴う興味深い例について紹介する。ECA と Life-like CA の双方でそのようなルールが存在し、特に ECA #37 の拡張ルールは、異なる知覚領域の大きさを持つセルの混合モデルとしてだけでなく、大きなルール近傍を持つ標準的 CA モデルとしても注目すべきものである。

### 1. はじめに

1940年代に Uram と Neuman [1] によって提唱されたセル・オートマトン (CA) は、格子状に配置されたセルで構成されるオートマトンであり、その後 1970年代に入り、Conway によって2次元 CA で生命活動を想起させるような複雑な振る舞いをするものが発見され、ライフゲームと呼ばれて注目された[2, 3]。さらに 1980年代には Wolfram によって1次元 CA が体系的に研究され、彼が提唱した CA のクラス分類は、パターン形成における複雑さの指標として多くの分野に影響を与えた[4-7]。

任意のセルの時間発展は、各時刻での自身を含めた近傍セルの状態を取得し、すべてのセルで共通のルールテーブル (CA ルール) を参照して次の時刻における自身の状態を決定する。これを標準的な CA と呼べば、その拡張としては、状態の更新が非同期的なものや、確率に依存した更新を行うものなどが知られている。Kayama [8, 9]は、古典的群知能のモデルである Reynolds による Boids [10]との比較から、各セルが状態を取得する領域 (知覚領域) の半径を、CA ルールで規定される近傍半径から独立させるための処方として**再帰的近傍推定**を提唱し、1次元2状態3近傍の基本 CA (Elementary CA: ECA) およびライフゲームを含む2次元2状態8近傍総和型の Life-like CA を基礎とした拡張 CA のパターン形成について議論した。以下では、“拡張 CA”とは再帰的近傍推定の導入により標準的 CA から導かれたモデルを意味するものとする。

拡張 CA では、すべてのセルに共通な CA ルールの近傍半径  $r$  とは別に、知覚領域の半径  $R$  (以下、知覚半径という) を各セル固有の属性として持つことが可能となる。ECA や Life-like CA などの近傍半径が  $r = 1$  の標準的 CA ルールから導かれた拡張 CA ルールは、知覚半径  $R (=1, 2, 3, \dots)$  を指標とするルール系列を構成し、 $R = 1$  の拡張 CA ルールは、元の標準的 CA ルールに一致する。また  $R > 1$  の拡張ルールも、実際は近傍半径  $r$  が  $R$  に等しい標準的 CA ルールと同等であり、標準的 CA の枠組みを超えるものではない。しかし、これまで  $r > 1$  の多近傍ルールを研究対象とする場合、ルール総数は指数関数的に増加し、時間発展によって導かれる

<sup>1</sup>本研究は梅花学園の助成を受けたものである。

多近傍ルール<sup>2</sup>を除けば、異なる  $r$  の値を持つルールを相互に関係づける方法は存在しなかった。つまり、この再帰的近傍推定による CA の拡張は、 $r = 1$  の標準的 CA と  $r > 1$  のそれをつなぐ新たな処方箋を提供するものである。

再帰的近傍推定による CA の拡張では、上述のように CA ルールで規定される近傍半径  $r$  とは別に、各セル固有の属性として知覚半径  $R$  を導入することができる。すなわちそれは、ある標準的 CA ルールに従うが、異なる知覚半径を持つセルで構成された CA モデルとなる。言い換えれば、新たな CA モデルは、ある標準的 CA ルールから導かれる拡張 CA のルール系列に属するルールに従うセルから構成される。すべてのセルの拡張ルールが同一 ( $R$  が等しい) モデルを *homogeneous*、そうでないものを *heterogeneous* と呼べば、標準的 CA モデルはすべて *homogeneous* である。すなわち、ここでの拡張 CA の枠組みは、標準的 CA モデルをその特殊な場合として包含し、ルールとしての拡張ではなく、 $R$  という自由度を得たセルの配位としての拡張された CA モデルをもたらす。知覚半径  $R$  は、まさに個々のセルが取得する情報量の指標であり、その情報量が CA ルールを用いた再帰的近傍推定により処理され、時間発展に伴う多様なパターンを生成する。情報量をゆらぎの制御に利用して自身を維持するのが生命活動だとすれば、ここでの情報量と CA ルールおよび再帰的近傍推定の関係性は、こうした生命活動の基本となるルールを探求できる可能性を持つ。

本稿では、先ずすべての ECA ルールと代表的な *Life-like CA* ルールから導かれる拡張ルール系列を取り上げ、*heterogeneous* なモデルを想定した場合の再帰的近傍推定の正確性とパターン形成との関係について考察する。推定値に対する正確性の目安としては、推定値と実際の状態値 (実現値) の間の相互情報量を採用する[11, 12]。これにより、知覚情報が実現値にどの程度反映されているかを見ることができる。モデルとして興味があるのは、再帰的近傍推定による拡張 CA ルールが情報量を効率的に処理し、ゆらぎを制御するようなものであるから、相互情報量が  $R$  とともに増加し、それがパターン形成にも反映されるようなモデルを探索する。一般に *heterogeneous* なモデルでは自由度が大きいため解析は困難であるが、対称性を持った単純なケースについては *kayama* [13] で平均場近似を用いた議論が可能であることが示されている。ここでは、ある範囲の異なる  $R$  の値を持ったセルが等しい割合で混在した場合を想定して相互情報量を求める。

次章では、再帰的近傍推定による標準的 CA の拡張について概観し、第 3 章では、推定値の正確性を評価するための相互情報量について定式化したうえで、すべての ECA ルールと代表的な *Life-like CA* ルールについて議論する。興味深いパターン形成を示すと同時に、*Langton* の  $\lambda$  パラメータ[14]と相互情報量の計算結果において、再帰的近傍推定が有効に機能していると考えられる例を紹介する。

## 2. 再帰的近傍推定による CA の拡張

標準的 CA と、ここでの CA の拡張とが本質的に異なる点は、CA ルールの適用に対する解釈である。標準的 CA では、対象セルが、ルールで規定される近傍内のセルの現時刻  $t$  での状態を取得し、CA ルールを用いて、次の時刻  $t + 1$  での自身の状態を決定する。一方ここでの拡張では、CA ルールは近傍セルの時刻  $t$  での状態に適用されるのではなく、時刻  $t + 1$  での状態の推定値に対して適用される。すなわち、以下のように近傍セルの時刻  $t + 1$  での状態を推定する過程が付け加わる：

1. 知覚領域内のセルの時刻  $t$  での状態を取得
2. 近傍セルの時刻  $t + 1$  の状態を推定
3. CA ルールにより自身の時刻  $t + 1$  の状態を決定

---

<sup>2</sup>時間発展のステップを  $t$  とすれば、 $r = 1$  の ECA から  $r = t$  近傍 CA ルールが導かれる。

1. で知覚された領域内のセルの状態の情報 $\{x_{\text{知覚領域}}^{(t)}\}$ から, 3. で時刻 $t + 1$ での対象セルの状態 $x_{\text{対象セル}}^{(t+1)}$ が決定される間に, 2. の近傍セルの状態の推定値 $\{\varphi_{\text{近傍セル}}^{(t+1)}\}$ を求める過程が導入されることで, 時間発展のためのルール近傍と近傍推定のための知覚領域という役割の分離が導かれ, 知覚領域は各セルの独立した属性として与えることが可能となる. 2. のアルゴリズムとしては様々なものが考えられるが, 各セルが同一のアルゴリズムで近傍推定を行い, その際に利用するルールは元の CA ルールのみであると仮定した場合の 1 つの解が再帰的近傍推定である (図 1) .

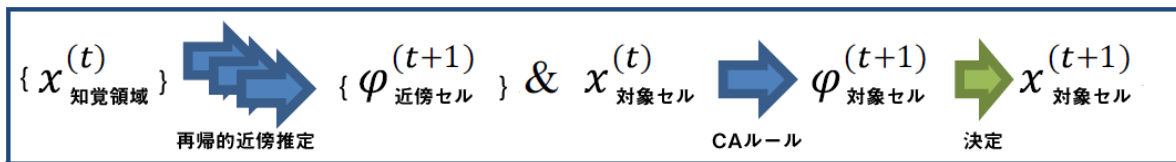


図 1. 拡張 CA における時間発展

再帰的近傍推定の過程は以下のようなものである: 対象セルは, 近傍セルの状態を推定する際, 先ず近傍セルの知覚領域の大きさを推定する必要がある. 但し, 近傍セルの知覚領域として推定できる大きさは, 対象セルの知覚領域によって制限されているため, ここでは, 対象セルの知覚領域内で取り得る最大領域が近傍セルの知覚領域であると仮定する. 別の仮定の選択は, 再帰的近傍推定のバリエーションとして可能であるが, それを選択する積極的な理由がないため, ここではこのように仮定する. 対象セルは, 近傍セルが時間発展の過程を自身と同じアルゴリズムで遂行するものとして (近傍セルになったつもりで) その次の時刻の状態を推定する. 近傍セルは, そのまた近傍のセルの次の時刻の状態を推定する (だろう). 近傍セルのそのまた近傍セルの知覚領域は, 近傍セルのそれによって制限された領域として推定され, さらに近傍セルのそのまた近傍セルも同様のアルゴリズムで時間発展するものとして次の時刻の状態を推定する. 以下同様にして, 近傍のそのまた近傍のそのまた...は繰り返され, ついには最初の対象セルの知覚領域の境界まで達し, 境界セルの知覚領域は自身しか含まないと推定される. その境界セルの次の時刻の状態は現時刻のそれと一致すると仮定して推定値が定まる<sup>3</sup>. こうして境界セルの状態の推定値から対象セルの近傍セルまで, 再帰的に CA ルールを適用しながら推定値が決定される.

以下では空間的に等方な格子状において, セルの近傍と知覚領域がともに対象のセルを中心とした半径 $r$ および $R$ でそれぞれ規定される CA について考える. 基本となる CA は 1 次元の ECA と 2 次元の Life-like CA に限定するので $r = 1$ と考えてよい. 具体的な定式化とパターン形成の例については論文[14]に詳しいが, この拡張は, 本質的な変更を標準的 CA ルールに科すものではなく, 実は知覚領域と同じ大きさに拡大された近傍を持つ標準的 CA ルールを導いたことに他ならない. しかし, 基本となる CA ルールと近傍半径が大きな CA ルールとを結ぶ新たな処方箋を与えたことは重要である. さらに, セルの属性となった知覚領域は, 各セルが獲得する情報量の大きさの目安となり, 情報量とパターン形成との関係を議論するという, CA の応用分野に新たな方向性を与えると期待できる.

### 3. 再帰的近傍推定の正確性

各セルは, その知覚領域で獲得した情報量を再帰的近傍推定によって処理し, 近傍セルの状態を推定するので, 再帰的近傍推定が効率的に機能しているかどうかは, 情報量の違い, すなわち $R$ の値に対して, その推

<sup>3</sup>境界セルの推定値を定める仮定が再帰処理の終了条件である.

定値の正確性がどのように依存するかを評価すればよいと考えられる。言い換えれば、推定によって近傍セルの次の時刻の状態の不確かさがどれほど減少したかを求めればよい。そこで、ここでは相互情報量を採用する。 $\Phi$ と $X$ を近傍セルの状態の推定値と実現値の確率変数とすれば、相互情報量 $I(\Phi, X)$ を求める式は

$$I(\Phi, X) = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{x \in X} p(\varphi, x) \log \frac{p(\varphi, x)}{p(\varphi)p(x)} \quad (1)$$

となる。但し $p(\varphi)$ と $p(x)$ は、それぞれ $\Phi$ と $X$ の確率分布を表す。また $p(\varphi, x)$ は、 $\Phi$ と $X$ の同時確率分布である。ここでは2値のCAを対象とするので、 $\Phi$ と $X$ はともに $\{0, 1\}$ である。図1の表記に従えば、これらの確率分布は $p(\varphi_{\text{近傍セル}}^{(t+1)})$ と $p(x_{\text{近傍セル}}^{(t+1)})$ および $p(\varphi_{\text{近傍セル}}^{(t+1)}, x_{\text{近傍セル}}^{(t+1)})$ で与えられる。対象セルの知覚領域の半径が $R_{\text{対象セル}}$ であれば、前節の仮定から、対象セルはその近傍セルの半径を $R_{\text{対象セル}} - 1$ と推定するはずである。もしも近傍セルの半径 $R_{\text{近傍セル}}$ が $R_{\text{対象セル}} - 1$ に等しければ、対象セルの推定値は完全に正確な値となり、 $p(\varphi)$ 、 $p(x)$ 、 $p(\varphi, x)$ はすべて等しい確率分布を与える。それを $p(x)$ とすれば、式(1)は

$$I(X) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{1}{p(x)}, \quad (2)$$

すなわち、近傍セルの実現値のエントロピーに一致する。しかしこれは、あくまで近傍セルの半径が $R_{\text{対象セル}} - 1$ に等しい場合であり、heterogeneousなモデルでは必ずしも成り立たない。一般的なheterogeneousモデルを想定して具体的な確率分布を求める場合には、モデルを構成するセルの半径 $R$ の最大値 $R_{\text{max}}$ を考え、初期配位は $R = 1, 2, \dots, R_{\text{max}}$ のセルが等しい割合で混合しているものとし、 $R_{\text{対象セル}}$ の対象セルの近傍セルが $R_{\text{近傍セル}}$ を持つときの相互情報量を $I(\Phi_{R_{\text{対象セル}}-1}, X_{R_{\text{近傍セル}}})$ として、 $R_{\text{近傍セル}}$ についての平均 $avgI$ ：

$$avgI(R_{\text{対象セル}}; R_{\text{max}}) = \frac{1}{R_{\text{max}}} \sum_{R_{\text{近傍セル}}=1}^{R_{\text{max}}} I(\Phi_{R_{\text{対象セル}}-1}, X_{R_{\text{近傍セル}}}) \quad (3)$$

を推定の正確性を評価する指数として採用する。

### 3.1 拡張 ECA における相互情報量

ECA は最も単純な自明でない CA であるが、 $2^3 = 8$ の異なるルール近傍の配位から、 $2^8 = 256$ 個のルールが存在する。それらは、Wolfram の表記法[4, 7]に従って#0 から#255 で表すものとする。このうち、対称性から独立なルールは 88 個に絞られることが知られている[15, 16]。知覚領域の半径  $R$  を指標とする拡張ルールの系列は、例えば#110の場合、そのルール番号と  $R$  の値を用いて、以下のように表す：

$$[\#110] = \{\#110R1, \#110R2, \#110R3, \dots\} \quad (4)$$

ここで、系列の初項#110R1 は基本 CA ルールの#110に一致する。

具体的に  $avgI$  を求めるには、長さ  $2R_{\text{max}} + 1$  のセル配列と、中央を共有した長さ  $2R + 1$  ( $R = 1, 2, \dots, R_{\text{max}} - 1$ ) の部分配列を取り、再帰的近傍推定により得られた中央のセルの状態値の分布から、対象セルと近傍セルの半径  $R_{\text{対象セル}}$  および  $R_{\text{近傍セル}}$  に従って  $p(\varphi_{R_{\text{対象セル}}-1})$  と  $p(x_{R_{\text{近傍セル}}})$  および  $p(\varphi_{R_{\text{対象セル}}-1}, x_{R_{\text{近傍セル}}})$  を求めればよい。

但しこの節では  $R_{\text{max}} = 11$  とし、 $2^{2R_{\text{max}}+1}$  の全てを初期配位とする。88 個の独立な ECA ルールから導かれる拡張 ECA のルール系列について、相互情報量を求めた結果の中で代表的なものを以下に紹介する。但し、拡張 ECA ルールの特徴を示すために Langton の  $\lambda$  パラメータも併せて示す。相互情報量が 0 とは、式(1)で

$p(\varphi, x) = p(\varphi)p(x)$ が成り立ち、推定値と実現値が独立であることを意味する。Wolfram のクラス分類による Class I に属するすべてのルールにおいて、拡張ルール系列は  $R_{\text{対象セル}} \geq 3$  で  $avgI = 0$  または 0 に漸近する。一方、Class III に分類されるランダム性が高い #30 や、#90、#60 などの加法性を持つルールの拡張ルール系列では、 $R_{\text{対象セル}} \geq 2$  で  $avgI = 1/R_{\text{max}}$  となる。その理由は、再帰的近傍推定において近傍セルの  $R$  を  $R_{\text{対象セル}} - 1$  と推定するため、 $R_{\text{近傍セル}}$  が  $R_{\text{対象セル}} - 1$  に等しいとき、すべての推定値が実現値に一致するので  $I(\Phi_{R_{\text{対象セル}}-1}, X_{R_{\text{近傍セル}}}) = 1$  となり、それ以外の場合はすべて  $I = 0$  になるからである。興味があるのは、複雑

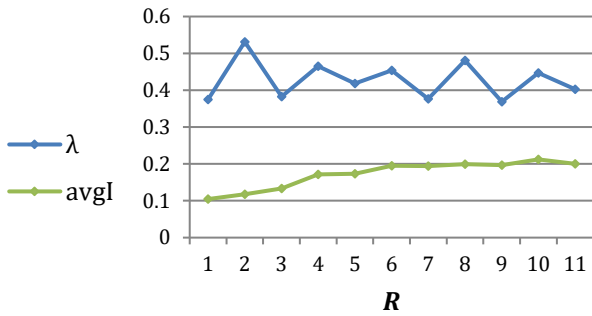


図 2. [37]の  $avgI$  と  $\lambda_R$

なパターンを示しながらも  $R_{\text{対象セル}}$  の増加に伴って  $avgI$  も増加するような拡張ルール系列であるが、Class III に分類されるルールの拡張ルール系列の中で、比較的大きな  $avgI$  の値を持つものにそのような特徴がある。また、特筆すべきは #37 のルール系列 [#37] である。#37 は ECA ルールとしては Class II に分類されるが、図 2 のように  $avgI$  の明らかな増加が認められ、図 3 のように [#37] は  $R \geq 2$  で特徴的なパターンを見せる。heterogeneous モデルとしてだけで

はなく、homogeneous モデルとしても注目に値する。以上のことから、再帰的近傍推定で導かれた拡張ルールの中に、複雑なパターン形成を伴いながら、セルの情報量を効率的に処理するようなルールが存在することがわかった。

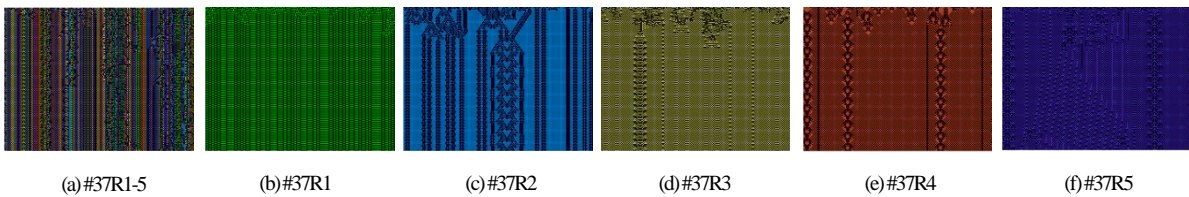


図 3. [37] のパターン形成. (a) heterogeneous モデル ( $R = 1 \dots 5$ ), (b)~(f) homogeneous モデル.

各色のドットは、 $R$  の異なる alive のセルを表す。

### 3.2 拡張 Life-like CA における相互情報量

Life-like CA は 2次元 8近傍外部総和型ルールであり、Golly/RLE形式[17, 18]に従えば、あるセルの状態が dead のとき次の時刻に alive に変化することを birth と呼び、alive のとき次の時刻もそのまま alive であることを survival と呼んで、birth (B) または survival (S) となるための 8近傍に対する条件によってルールを区別することができる。ライフゲームのルールは B3S23 で表され、これに知覚領域の半径  $R$  も指標として組み込んで拡張 Life-like CA ルールを表現する。avgI の計算には、1 辺が  $2R_{\text{max}} + 1$  の正方形のセル配列と、中央を共有した一辺が  $2R + 1$  ( $R = 1, 2, \dots, R_{\text{max}}$ ) の部分配列についてシミュレーションすることになる。但し  $R_{\text{max}} = 10$  とする。

ここで  $2^8 \times 2^8 = 65536$  個すべてのルールを探索することはしないが、これまで多くの研究者によって調べられている特徴的なルールの拡張について紹介する。まずは Conway のライフゲームであるが、その拡張ルール系列 [B3S23] の平均相互情報量  $avgI$  ( $R = 1..10$ ) を図 4 に示す。各  $R$  の値について 100 回のシミュレーションを行い、各回において  $R = 1..10$  を持つセルの格子をランダムに配置し、 $10^5$  の初期配位を生成した。

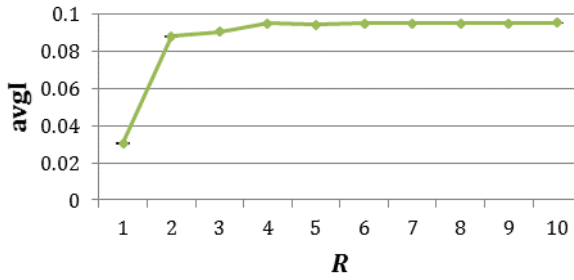


図4. [B3S23]の *avgI*. エラーバーは標準偏差を表す.

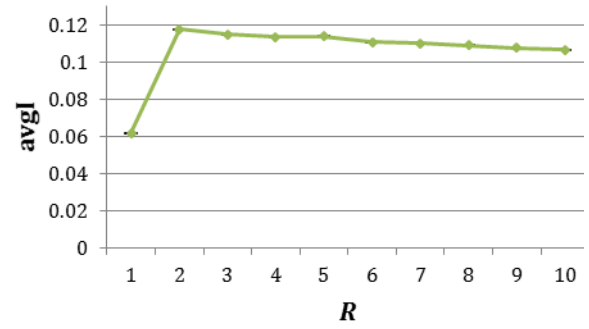


図5. [B23S234]の *avgI*. エラーバーは標準偏差を表す.

$R = 0$ のセル (状態を変えないセル) は含まないので  $R = 1$ の *avgI* は極端に小さいが,  $R = 2$ 以上の値で増加傾向にあり,  $R \geq 6$ で 0.1 に漸近的である. [B36S125] (2×2)や[B36S23] (HighLife)なども類似の分布を持つ. 一方, 対照的なパターン形成を示す[B23S234]では, *avgI*は  $R$ とともに減少傾向であり, 上から 0.1 に漸近的である(図5). パターン形成と *avgI*の傾向の双方で興味深いものとしては[B3S45678] (Coral)がある.  $\lambda$ は  $R$ とともに減少するが, *avgI*は  $2 \leq R \leq 7$ で増加傾向を示す(図6). パターン形成は, 植物が成長するように領域を占有していく(図7). なお, 成長の様子は  $R$ の大小でそれほどの差異は認められない. 以上のように, Life-like CA の拡張においても, 複雑なパターン生成を伴いながら再帰的近傍推定によって情報量を効率的に処理するルールが存在が確認された.

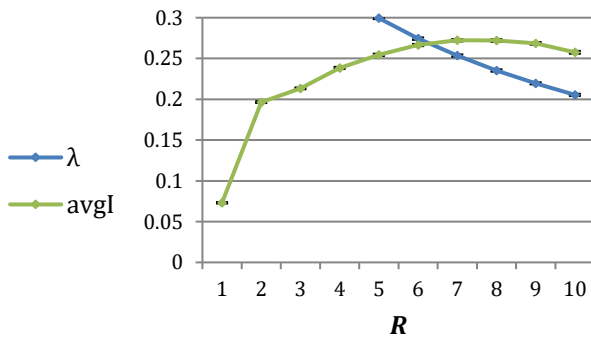


図6. [B3S45678] (Coral)の *avgI* と  $\lambda$

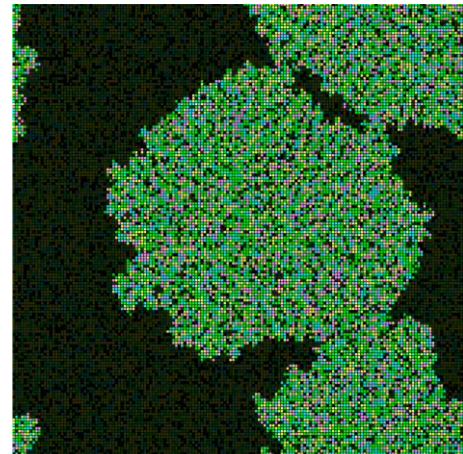


図7. [B3S45678] (Coral) の heterogeneous モデル( $R = 2 \dots 5$ )のパターン形成.

#### 4. おわりに

再帰的近傍推定の導入により拡張された CA のモデルでは, 近傍半径  $r$ とは別に, 各セルに個別の知覚半径  $R$ を属性とすることが可能となる. その特徴を議論するために, 本稿では, 推定の正確性を評価する目安として相互情報量を用いた. 基本ルールとして  $r = 1$ の1次元 ECA と2次元 Life-like CA を取り上げ, それらの拡張ルール系列において, 複雑なパターン形成を持ちながら, 相互情報量が知覚半径  $R$ とともに増加するような例を探索した. その結果, 興味深い例として ECA の[#37]と Life-like CA の[B3S45678] (Coral)が見出された. これらのモデルは, 再帰的近傍推定による拡張 CA のより深い理解に役立つと考えられる. 一方で,  $R$ の増加に伴って相互情報量が減少するような例も存在し, 再帰的近傍推定と基本 CA ルールとの関連性によって, 拡張ルール系列の振る舞いが大きく異なることが分かった. 他分野への応用を考えたとき, モデルのどのような性質を明らかにすることが重要なのかを再考し, 各拡張ルール系列の特徴をより明確にするための方法を確立することが必要となる. 相互情報量を評価関数としたルールの進化計算なども, 今後取り組むべきテーマであろう.

## 参考文献

- [1] Neumann J. von (1966), The theory of self-reproducing automata. In: Burks A. W. (Ed.), Essays on Cellular Automata, University of Illinois Press
- [2] Gardner M. (1970), Mathematical games. Scientific American, vol. 223, pp. 102-123
- [3] Berlekamp E. R., Conway J. H., and Guy R. K. (1982), Winning Ways for Your Mathematical Plays. Academic, New York
- [4] Wolfram S. (1983), Statistical mechanics of cellular automata. Reviews of Modern Physics, vol. 55, pp. 601-644
- [5] Wolfram S. (1984), Universality and complexity in cellular automata. Physica D, vol. 10, pp. 1-35
- [6] Wolfram S. (1986), Theory and Applications of Cellular Automata. World Scientific, Singapore
- [7] Wolfram S. (2002), A New Kind of Science. Wolfram Media, Inc.
- [8] Kayama Y. (2016), Extension of cellular automata by introducing an algorithm of recursive estimation of neighbors. In Proceedings of the twenty-first International Symposium on Artificial Life and Robotics, pp. 73-77
- [9] Kayama Y. (2016), Extension of cellular automata via the introduction of an algorithm for the recursive estimation of neighbors. Artificial Life and Robotics 21.3 pp. 338-344, Springer
- [10] Reynolds C. W. (1987), Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. ACM Siggraph Computer Graphics, vol. 21 (4), pp. 25-34
- [11] Shannon C.E. and Weaver W. (2015), The mathematical theory of communication. University of Illinois press
- [12] Cover T. M. and Thomas J. A. (2012), Elements of information theory. John Wiley & Sons
- [13] Kayama Y. (2016), Expansion of Perception Area in Cellular Automata Using Recursive Algorithm. In Proceedings of ALIFE 15: The Fifteenth Conference on the Synthesis and Simulation of Living Systems. pp. 92-99
- [14] Langton C. G. (1990), Computation at the edge of chaos. Physica D, vol. 42, pp. 12-37
- [15] Li W., Packard N. (1990), The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space, Complex Systems, vol. 4, pp. 281-297
- [16] Kayama Y. (2011), Network Representation of Cellular Automata. In 2011 IEEE Symposium on Artificial Life (IEEE ALIFE 2011) at SSCI2011, pp. 194-202
- [17] Adamatzky A. (Ed.) (2010), Game of life cellular automata. London, Springer
- [18] Eppstein D. (2010), Growth and decay in Life-like cellular automata. In Adamatzky A. (Ed.), Game of Life Cellular Automata, Springer, pp. 71-98