

再帰的近傍推定によるセル・オートマトンの拡張

Extension of Cellular Automata by Introducing an Algorithm of Recursive Estimation of Neighbors

香山 喜彦

KAYAMA Yoshihiko

要旨 本研究は、正方格子上に配置されたセルで構成され、すべてのセルが同時に時間発展する標準的なセル・オートマトンの拡張について議論する。各セルは、ある時刻の近傍セルの状態から自身の次の時刻の状態を一定のルールに従って決定するが、その近傍もそのルールによって規定されており、セルの個体差を表現する余地はない。そこで、ルールで規定される近傍とは別に、各セルが他のセルの状態を取得できる知覚領域の大きさをパラメータとして導入できる拡張セル・オートマトンを提唱する。この拡張の目的は、知覚領域の大きさを各セルが取得できる情報量の指標とし、多要素系における情報処理とパターン形成との関連を、セル・オートマトンの枠内で議論するためのモデルを構築することである。ここで、取得した知覚領域内のセルの状態から次の時刻の状態を決定するアルゴリズムとして、ルールを再帰的に用いた推定法を導入する。これにより、もとのルールとは異なるアーキテクチャを導入することなく拡張が可能となる。この拡張を1次元2状態3近傍ルール(ECA)およびConwayのライフゲームを含む2次元2状態8近傍外部総和型ルール(Life-like CA)に適用した場合のパターン形成の例を紹介する。特に後者においては、知覚領域の大きさとパターン形成の関連を議論する上で興味深い例が示され、このモデルの今後の理論的広がりとの他の分野への応用が期待される。

1. はじめに

セル・オートマトン(CA)とは格子状に配置されたセルで構成されるオートマトンであり、1940年代にUlamとNeuman [1] によって提唱された。その後1970年代に入り、2次元CAで生命活動を想起させるような複雑な振る舞いをするものがConwayによって発見され、ライフゲームと呼ばれて注目された[2, 3]。さらに1980年代にはWolframによって1次元CAが体系的に研究され、彼が提唱したCAのクラス分類は、パターン形成における複雑さの指標として多くの分野に影響を与えた[4-7]。標準的なCAでは、任意のセルが各時刻での自身を含めた近傍セルの状態を取得して、すべてのセルに共通のルールテーブル(CAルール)を参照し、次の時刻における自身の状態を決定する。その拡張としては、状態の更新が非同期なものや、確率に依存した更新を行うものなどが知られている。一方ここで議論するCAの拡張は、各セルが状態を取得する近傍セルの領域に関するものであり、取得した情報と時間発展によるパターン形成との関連を考察するためのモデルとして利用する。

本論への導入として、群知能の一つであるBoidsについて取り上げる[8, 9]。Boidsを構成する任意の要素は、その知覚領域内に存在する他の要素の運動状態を取得し、特定のルールに基づいて自身の運動状態を決定する。各要素の知覚領域は、ルールを適用する範囲を定めるためのパラメータによって規定され、適当なルール設定により、無秩序な運動から秩序ある集団が構成されていく。すなわちこれは、知覚領域で取得した情報を各要素がルールに従って処理し、自身の運動を決定することによって集団のゆらぎが制御され、秩序が形成される典型的な例と言える。

上記のような情報処理と秩序形成の関係を、CAの枠組みで考察するための処方箋を考える。Boidsと同様に自身を含む近傍セルの領域を知覚領域と呼ぼう。通常その大きさはCAルールによって規定されており、各セルの知覚領域に属するセルに変動はない。そこで、まず知覚領域の大きさがルールで規定されず、パラ

メータとして導入できるような CA を定義する必要がある。知覚領域が大きいセルは、それだけ取得する情報量も多くなり、近傍セルの状態変化をより正確に把握できる可能性を持つ。それゆえ、異なる知覚領域の大きさを持つセルからなる CA を考えれば、異なる情報量を保持する要素からなる集合が、時間発展によりどのようなパターンを形成するか、といったシミュレーションのためのモデルになりえる。

以下では、“拡張された CA”とは CA ルールで規定される近傍と知覚領域の大きさが異なるものを意味するものとする。実際にこのモデルを定義し、時間発展させるために重要となるのは、知覚領域内のセルの情報を処理し、自身の状態の更新を決定するアルゴリズムである。ここで、基本となる CA ルールとこのアルゴリズムとの関係が問題となるが、本稿で議論するのは、CA ルールを再帰的に利用した状態の推定法であり、それを**再帰的近傍推定**と呼ぶ。これは、知覚領域内のすべてのセルが、自身と同様なアルゴリズムで時間発展すると仮定することで導かれる。この拡張された CA は、知覚領域を規定するパラメータを媒介変数とし、基本となる CA を初項としたルール系列を構成する。ただし、ここで議論する再帰的近傍推定が唯一のアルゴリズムというわけではなく、必ずしも有効なものであるとも限らない。なおアルゴリズムの有効性は、情報から推定された近傍の状態値の正確性によって評価されると考えられるが、それは基本となる CA ルールや近傍セルとその状態にも依存し、いくつかの具体例での検証を除いて、本稿ではこれ以上の一般的議論は行わない。

次章では、上記の拡張および近傍推定について議論し、特に 1 次元の CA で最も基本的なセル状態が 2 値 (alive または dead) の 3 近傍ルール (Elementary Cellular Automata: ECA) を例にとり、再帰的近傍推定の定式化を行う。続いて第 3 章では、ECA の拡張とライフゲームを含む 2 次元 8 近傍外部総和型ルールの拡張について議論し、代表的なパターンのいくつかを示すとともに、知覚領域の大きさが異なるセルを混在させた場合に、情報量とパターン形成との関連を示す興味深い事例について紹介する。これらの結果は、情報を持つものと持たざるものとの関係や、異なる液体を混ぜた場合の凝固反応、シマウマや魚、貝の表面などに見られる自然界のパターン形成などを想起させる。

2. CA の拡張と知覚領域での近傍推定

第 1 章の目論見を実現するには、まず CA ルールの近傍と知覚領域を切り離す必要がある。Boids の場合、知覚領域内の要素の位置と速度を取得し、それらの平均値を求める、ないしは平均値を持つような要素の代表を考え、それに追従するように自身の運動を変化させる。CA についても同様に、知覚領域内のセルの状態を取得し、その平均値を持つような代表セルを考え、ルールで規定される近傍としてその代表セルを選ぶことができる。この際、近傍セルはもはや実際のセルとは一致せず、ルールを適用するための対象でしかない。Boids の場合、平均値へ近づこうとする状態の更新がゆらぎを制御し集団の形成に至ったが、CA でのこうした拡張は、いわば粗視化によるパターン生成であり、これまでのところ注目すべき結果は得られていない。

では、知覚領域が CA ルールから規定される近傍を内包するようなモデルへの拡張を考えてみよう。これらの関係を我々の日々の行動に置き換えて例えるなら、取得した周囲(知覚領域)の情報のすべてを同等に評価して自身の行動を決定するのではなく、より身近な両親や兄弟、友人(近傍)の行動に強い影響を受けて自身の行動を決めるようなものである。ここで目標とする拡張された CA とは、基本となる CA ルール(これをベースルールと呼ぶ)はそのままだに、極力無理のない形で知覚領域を拡張した CA である。ここで“無理のない”拡張とは、ベースルールとは異なる他のルールの導入といった意図的な変更を加えず、知覚領域のサイズが個体差を表すパラメータとして扱えるような拡張という意味である。つまり、できるだけ単一のアーキテクチャに従う要素の集団を議論の対象とし、個体差から変化を導くという立場を取るものとする。

知覚領域を導入する基本的な考え方を説明するために、ここで再度、我々の行動について振りかえれば、ある時刻での周囲の状況を情報として取得し、次の時刻での自身の行動を決定する際には、(反射的に行動するよう訓練されていなければ)そこに推論の過程を伴う。つまり、周囲の情報を元に、次の時刻に周囲がどのような行動に至るかを予測することを経由して自身の行動を決定する。Boids で定義されているルールの中の 1 つである整列(Alignment)では、知覚領域内の要素の速度の平均を求めて、それに追従するように自身の速度を変更するが、それはこの推論の過程に相当する。第 1 章で述べた再帰的近傍推定とは、ここで提示する CA の拡張において、知覚領域内の要素の情報からそれらの行動を予測し、その結果をもとに自身の行動を決定するという推論の過程において、領域内の各要素も自身と同じアルゴリズムで推論し行動すると仮定することである。以降では、ベースルールが規定する近傍を単に”近傍”と呼ぶものとする。再帰的に利用されるのはベースルールの”ルールテーブルを参照する行為”であり、近傍セルの状態の予測から自身の行動の決定に至るまで繰り返されるものとする。こうすることで、ベースルールとは異なるルールを導入することは不要となる。

以上の議論を整理すれば、ここでの CA の拡張とは、従来の CA に対し、次のような仮定を付加することである。

- (i) 各セルは、その近傍がベースルールによって規定されるとともに、近傍を含む知覚領域が存在し、各時刻において、その知覚領域内のセルの状態値を取得できる。
- (ii) 各セルは、任意の時刻において取得した知覚領域内のセルの状態値から、次の時刻における自身の状態値を、ベースルールを用いて再帰的に推定する。
- (iii) 再帰的推定のアルゴリズムは、知覚領域内のすべてのセルが同様のアルゴリズムで推定を実行していると仮定して行われる。但し、各推定対象のセルの知覚領域は、推定を実行するセルの知覚領域に含まれる最大の領域に等しいと仮定する。
- (iv) 知覚領域として近傍よりも小さい領域しか構成できないセルの推定値は、現時刻の状態値に等しいと仮定する。

なお議論を単純化するために、以下では空間的に等方な格子上において、セルの近傍と知覚領域がともに対象のセルを中心とした半径 r および R でそれぞれ規定される CA について考える。具体的な定式化として、最も単純な 1 次元 2 状態 3 近傍($r = 1$)の ECA を取り上げよう。まず、知覚領域の半径 R の値も r と同じ1に等しい場合を考える。従来の CA では時刻 t で両隣のセルの状態を取得し、自身の状態と合わせてルールテーブルを参照し、時刻 $t + 1$ での自身の状態を決定する。これを次のように考える。時刻 t での両隣のセルの状態を取得し、これらのセルの時刻 $t + 1$ での状態を推定する。このとき、上記の仮定(iii)に従ってこれら両隣のセルの知覚領域を求めるのだが、これらのセルの隣には知覚領域外のセルが含まれるため 3 近傍を構成できない。そこで仮定(iv)に従い、両隣のセルの $t + 1$ での推定値は時刻 t での状態に等しいとする。そして、両隣の $t + 1$ での推定値と自身の t での状態値とでルールテーブルを参照し、 $t + 1$ での自身の状態を決定する。つまり、 i 番目のセルについて、時刻 t での状態を $x_i^{(t)}$ 、半径 R の知覚領域の情報から推定された時刻 $t + 1$ での推定値を $\varphi_{R,i}^{(t+1)}$ とし、ルールテーブルを参照する行為を f とすれば、従来の時間発展の式

$$x_i^{(t+1)} = f(x_{i-1}^{(t)}, x_i^{(t)}, x_{i+1}^{(t)}) \quad (1)$$

を

$$\varphi_i^{(t+1)} = f(\varphi_{0,i-1}^{(t+1)}, x_i^{(t)}, \varphi_{0,i+1}^{(t+1)}) \quad (2)$$

と解釈するのである。但し、 $\varphi_{0,i\pm 1}^{(t+1)}$ は3近傍を構成できない両隣のセルの時刻 $t+1$ での推定値を表し、仮定

(iv)よりこれらの推定値は時刻 t での状態 $x_{i\pm 1}^{(t)}$ にそれぞれ等しくなる。また、 $\varphi_{R,i}^{(t+1)}$ は実際にセル i の状態値になるので $x_i^{(t+1)}$ と等しく、Eq. (2)はEq. (1)に一致する。すなわち、 $R=r=1$ の拡張ルールはベースルールと同等である。これはECAに限ったことではなく、一般に $R=r$ の拡張CAは基本のCAに等しい。

次に $R=2$ の場合に進もう。これは5近傍ルールに対応するが、ベースルールは3近傍ECAであり、再帰的近傍推定が意味を持つことになる。仮定(iii)から、セル i の両隣のセル $i-1$ と $i+1$ の推定において、セル $i-2$ と i およびセル i と $i+2$ はそれぞれ両隣となり3近傍を構成できるが、5近傍は構成できない。従ってセル $i-1$ と $i+1$ の知覚領域の半径は1であり、上の $R=1$ の場合の要領で $t+1$ の状態値が推定される。以上のことから、 $R=2$ のルールは3近傍のベースルールを用いて次のように表現される。

$$\begin{aligned} x_i^{(t+1)} &= f(\varphi_{1,i-1}^{(t+1)}, x_i^{(t)}, \varphi_{1,i+1}^{(t+1)}) \\ &= f(f(\varphi_{0,i-2}^{(t+1)}, x_{i-1}^{(t)}, \varphi_{0,i}^{(t+1)}), x_i^{(t)}, f(\varphi_{0,i}^{(t+1)}, x_{i+1}^{(t)}, \varphi_{0,i+2}^{(t+1)})) \\ &= f\left(f\left(x_{i-2}^{(t)}, x_{i-1}^{(t)}, x_i^{(t)}\right), x_i^{(t)}, f\left(x_i^{(t)}, x_{i+1}^{(t)}, x_{i+2}^{(t)}\right)\right), \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi_{1,i-1}^{(t+1)}$ と $\varphi_{1,i+1}^{(t+1)}$ はあくまでもセル i が推定したセル $i-1$ と $i+1$ の時刻 $t+1$ での状態値であり、それぞれ実際の状態 $x_{i-1}^{(t+1)}$ と $x_{i+1}^{(t+1)}$ に等しいとは限らない。なぜなら、これらのセルの知覚領域が $R=1$ とは限らないからである。同様に R が3以上の場合も実行できる。従って、一般に

$$\varphi_{R,i}^{(t+1)} = f(\varphi_{R-1,i-1}^{(t+1)}, x_i^{(t)}, \varphi_{R-1,i+1}^{(t+1)}), \quad (2)$$

となり、知覚領域内のセル $i-j$ と $i+j$ の推定値 $\varphi_{R-j,i-j}^{(t+1)}$ と $\varphi_{R-j,i+j}^{(t+1)}$ はそれぞれ再帰的に

$$\begin{aligned} \varphi_{R-j,i-j}^{(t+1)} &= f(\varphi_{R-j-1,i-j-1}^{(t+1)}, x_{i-j}^{(t)}, \varphi_{R-j-1,i-j+1}^{(t+1)}), \\ \varphi_{R-j,i+j}^{(t+1)} &= f(\varphi_{R-j-1,i+j-1}^{(t+1)}, x_{i+j}^{(t)}, \varphi_{R-j-1,i+j+1}^{(t+1)}), \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。但し、 $j=1,2,\dots,R-1$ であり、 $j=R$ のとき、仮定(iv)によりセル $i-R$ と $i+R$ の推定値について

$$\varphi_{0,i\pm R}^{(t+1)} = x_{i\pm R}^{(t)}, \quad \varphi_{0,i\pm R\mp 2}^{(t+1)} = x_{i\pm R\mp 2}^{(t)} \quad (4)$$

が成り立つ。すなわち、仮定(vi)は再帰処理における終了条件(termination condition)に対応する。

以上がECAの拡張であるが、これは、知覚領域の半径 R という新たなパラメータを導入して、ECAをベースルールとした $(2R+1)$ 近傍ルールを求めたことに他ならない。もちろんこのルールは、ECAルールを時間 R ステップ進めて得られるルールとは全く異なった意味を持つ。なぜなら、そのような $(2R+1)$ 近傍ルールは、元の3近傍ルールの時間発展の速さを R 倍にしたものにすぎないからである。なお、近傍セルの状態を推定するアルゴリズムとして、仮定(iii)とは異なるものを選ぶのも可能であり、それがゲーム理論での戦略となる。

3. 拡張CAのパターン形成

前節では、ECAをベースルールとした再帰的近傍推定による拡張ECAを定式化した。5近傍以上のCAや2次元のCAについても同様に拡張できる。ここでは拡張ECAと、2次元正方格子上的Moore型9近傍

ルールの中で、ライフゲームを含む 8 近傍外部総和型ルールを拡張した CA において、 R 値の変化とともにどのようなパターン形成が見られるかを紹介する。

3.1 拡張 ECA

ここでは 1 次元格子を構成するすべてのセルの R 値が同一である場合(homogeneous)について、特徴的なパターンを示すものを紹介する。なお、計算においては R 値として 20 を最大値とする。

ECA に属する $2^8 = 256$ 個のルールは Wolfram によるルール番号に従って #0~#255 で表現するものとし、そのうち、対称性を考慮すれば独立なルールは 88 個であることが知られている[10, 11]。拡張 ECA のルール系列を[ルール番号]で表し、系列内の個々の拡張 CA を扱う場合には、ルール番号の後ろに文字 R とその値を付加するものとする。つまり、例えばルール#110 の拡張ルール系列は以下のように表現される。

$$[\#110] = \{\#110R1, \#110R2, \#110R3, \dots\},$$

まず、ランダムな初期状態から一様な状態に至るルール、すなわち Wolfram の分類における Class I に属するルール 8 個をベースとした拡張 ECA のルール系列に含まれるすべて($R \leq 20$)の拡張 CA は Class I である。一方、周期的な Class II に属するルールの拡張ルール系列には大きく変化するものが少

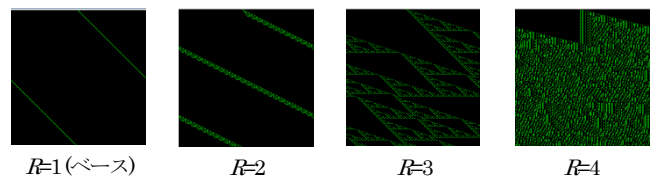


図1 [#134]のパターン形成

くない。興味深い例としてルール#134の拡張ルール系列[#134]がある。図1は、1 ドットのみ緑(alive, 黒は dead)にした初期状態からの時間発展であるが、 R について 4 を周期としてパターンが変化し、カオス的な性質も現れる。次にカオス的な Class III のうち、典型的な例としてルール#30の拡張を図2に示す。多くの

Class III に属するルールは R が大きくなると図2と類似のパターンに至る。また、複雑な振る舞いを持つ Class IV に属するルールとして有名な#110の場合には、 R 値の偶奇によってその振る舞いが周期的なものとそうでないものに変化する(図3)。なお、Class III に属するルール#22 や#126 でも R 値の偶奇に対する依存が認められる。その他にも複雑な振る舞いをするルールが存在し、こうした変化を解析的に理解することは、今後の興味深いテーマの一つである。

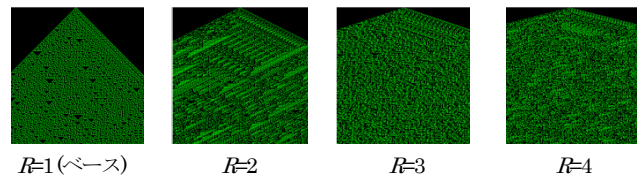


図2 [#30]のパターン形成

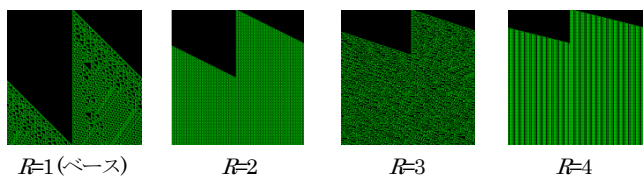


図3 [#110]のパターン形成

3.2 拡張 Life-like CA

ライフゲームを含む 2 次元 8 近傍外部総和型ルールは Life-like CA としてこれまでに多くの研究がなされているが[12, 13]、ここでは、ランダムな初期状態からのパターン形成で特徴的なものを紹介する。

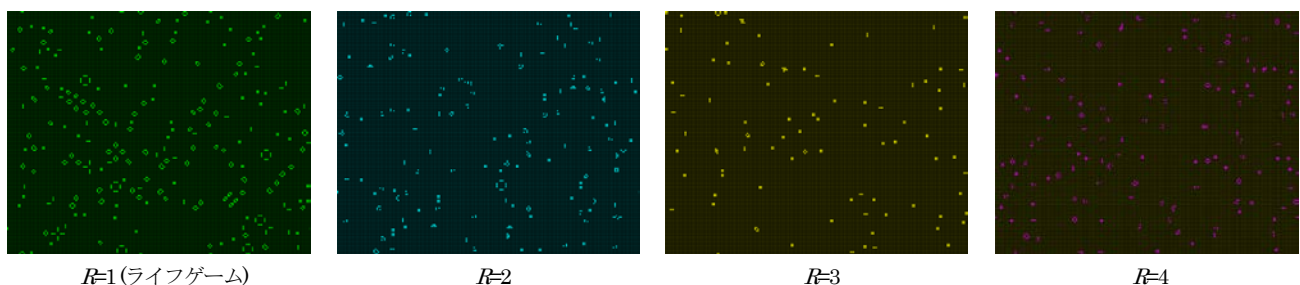


図4 [B3S23]の休止状態のパターン

Golly/RLE 形式に従えば[13]、あるセルの状態が dead のとき次の時間に alive に変化することを birth と呼び、alive のとき次の時間もそのまま alive であることを survival と呼んで、birth(B)または survival(S)となる

ための 8 近傍に対する条件によってルールを区別することができる。ライフゲームのルールは B3S23 で表現され、dead 状態のセルを取り巻く 8 近傍セルのうち 3 個が alive であれば birth が生じ、alive 状態のセルの 8 近傍セルのうち 2 個ないしは 3 個が alive であればそのまま alive となる。これに R 値も指標として組み込めば、拡張された 8 近傍外部総和型ルールの表現が得られ、ライフゲームは拡張ルールの B3S23R1 に等しい。まずは、正方格子上的すべてのセルが同一の R 値を持つ場合(homogeneous)を考えよう。ランダムな初期配位からの時間発展によるパターン形成において、B3S23R1 では休止状態が存在し、Block や Beehive などの静止物体や Blinker などの周期的配位が数多く確認されている[14, 15]。 R 値の異なる拡張ルールでもベースルールは同一であるから、十分に孤立した $R = 1$ での静止物体は同様に静止物体となる(図 4)。また、 R が大きくなるほどランダムな初期配位から休止状態に至る遷移時間は短くなる(図 5)。すなわち、各セルが取得する情報量が増大するとともにパターン形成に要する時間も短縮されており、情報がゆらぎの制御に有効に利用されていると考えられる。一方で、図 6 の[B23S234]のように、 $R = 1$ では休止状態を持つが、 R 値の増加に伴いランダムな振る舞いが激しくなるものもある。ベースルールを Maxwell の悪魔に例えるなら、確かに気ままな Maxwell の悪魔であればエントロピーが減少するとは限らない。ベースルールの違いによる情報処理とゆらぎの制御との関係については、今後の議論を待つことになる。

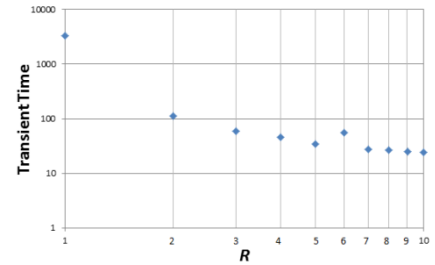


図 5 [B3S23]遷移時間の R 値依存.
初期配位 30, 両対数グラフ

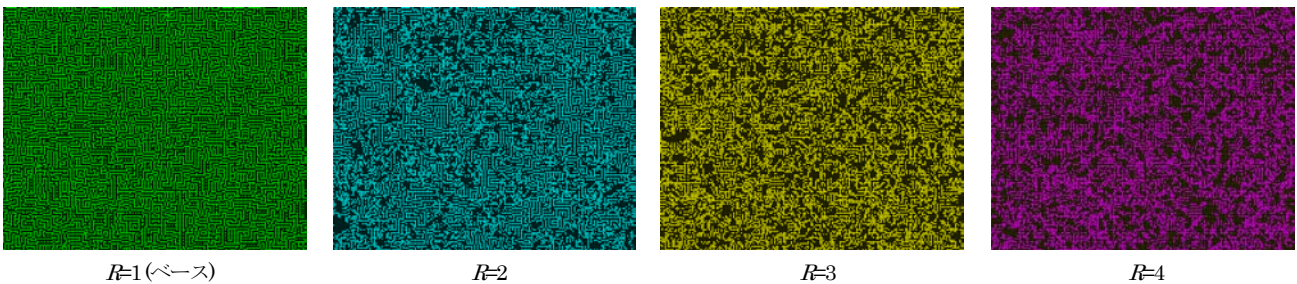


図 6 [B23S234]のパターン

なお、ライフゲームではグライダーを代表としたいくつかの移動物体が確認されているが、B3S23R2 や R6 でも図 7 のような移動物体が確認できる。特に B3S23R6 の移動物体により、図 5 において $R = 6$ で遷移時間が増加している。

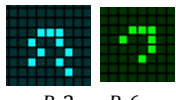
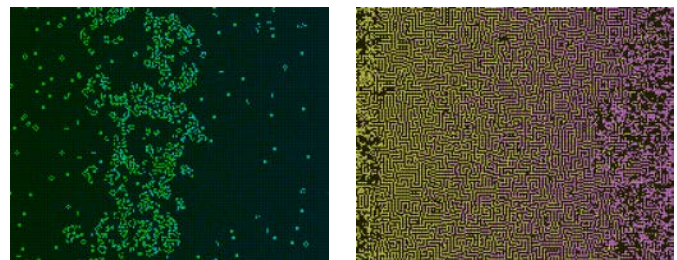


図 7 B3S23 移動物体

次に、異なる R 値を持つセルを混在させた場合(heterogeneous)のパターン形成について見てみよう。興味深い例として、拡張ライフゲームの B3S23R1 と R2 を混在させた場合のパターンを図 8-a に示す。どちらも単一の場合には休止状態を持つが、それらが入り混じった領域では変動



a. B3S23R1 \leftrightarrow R2

b. B23S234R3 \leftrightarrow R4

図 8 異なる R 値のセルを混合した場合.

混合比率は左から右に線形で 1:0 から 0:1 に変化.



図 9 B4S1234R1 \leftrightarrow R2
混合比率は図 8 に同じ.
初期配位の alive セルの確率 20%

が沈静化しない。

これは、2 種類の

固体を混ぜると液化するような変化を想起させる。予備的結果ではあるが、横断的なセルについて近傍セルの推定値の的中率をランダムな初期配位からの時間経過での平均値で求めてみると、 R 値が同一のセルで埋められる左右の領域では 1 に近く、それらが入り混じる領域では R1 のセルの的中率が極端に悪くなる。これはまるで、情報を持つもの(R2)が持たないもの(R1)を働かせているようである。一方、図 8-b の B23S234R3 と R4 では、R3 と R4 どちらの単一の場合

もランダムな状態を持つが、これらが入り混じる領域では休止状態に至る。これは、2種類の液体を混ぜると凝固するような変化を想起させる。さらに B4S1234R1 と R2 では、ランダムな R1 に対して、休止状態に至る R2 のセルを混ぜることで、図 9 のような縞模様が得られる。ここでは 2 種類のセルしか混合していないが、さらに多くの種類のセルの混合や初期配位を調整することで、多彩なパターンが得られると期待できる。

4. おわりに

モデルの拡張は、それが物理的であろうと論理的であろうと、もとのモデルの制限ないしは仕様に対する何らかの緩和、変更、追加を伴う。ここで議論した拡張では、CA のルールに対する解釈を変更して、近傍の状態を推定する過程を追加することで、ルールで規定される近傍と、各セルが周囲のセルの状態を知覚できる領域とを分離し、ルールの近傍とは別に知覚領域を導入して、各セルの個体差を表現できるモデルへと拡張した。近傍セルの状態を推定するアルゴリズムを再帰的近傍推定と呼び、ベースの CA ルールとは異なるアーキテクチャを導入することなく定式化され、ベースの CA ルールは、拡張 CA の知覚領域のサイズを指定する半径 R の値 ($R = r, r + 1, r + 2, \dots$) を指標とするルール系列の初項として含まれる。結果的に、ここでの拡張 CA とはベースルールよりも大きな近傍半径を持つルールの外挿法に他ならない。しかしそれが、パラメータ R だけで定式化でき、各セルが保持する情報量を表す指標となることが重要である。また第 3 章で見たように、拡張 CA によるパターンの多様性は、新たな CA の応用分野を開拓する可能性を持つ。シマウマや魚、貝の表面のパターン形成については多くの研究が行われているが、各セルが持つ情報量の違いから様々なパターン形成をシミュレートできるならば、拡張 CA もまた、有用なシミュレーションモデルの選択肢の 1 つとなるであろう。さらに、異なる R 値を持つセルの混合とともに進化計算を導入してパターン形成を論じるなら、Boids が要素間の相互作用と進化計算の導入により Swarm Chemistry として重要な発展を遂げたように[16-18], "CA Chemistry" のような理論の構築が可能ではないかと期待される。

参考文献

- [1] Neumann J. von (1966), The theory of self-reproducing automata. In: Burks A. W. (Ed.), Essays on Cellular Automata, University of Illinois Press
- [2] Gardner M. (1970), Mathematical games. Scientific American, vol. 223, pp. 102-123
- [3] Berlekamp E. R., Conway J. H., and Guy R. K. (1982), Winning Ways for Your Mathematical Plays. Academic, New York
- [4] Wolfram S. (1983), Statistical mechanics of cellular automata. Rev. Mod. Phys., vol. 55, pp. 601-644
- [5] Wolfram S. (1984), Universality and complexity in cellular automata. Physica D, vol. 10, pp. 1-35
- [6] Wolfram S. (1986), Theory and Applications of Cellular Automata. World Scientific, Singapore
- [7] Wolfram S. (2002), A New Kind of Science. Wolfram Media, Inc.
- [8] Reynolds C. W. (1987), Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. ACM Siggraph Computer Graphics, vol. 21.4, pp. 25-34
- [9] Banks A., Vincent J., and Anyakoha C. (2007), A review of particle swarm optimization. Part i: background and development. Natural Computing, vol. 6.4, pp. 467-484
- [10] Li W., Packard N. (1990), The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space, Complex Systems 4, 281-297
- [11] Kayama Y. (2011), Network Representation of Cellular Automata. In 2011 IEEE Symposium on Artificial Life (IEEE ALIFE 2011) at SSCI 2011, pp. 194-202
- [12] Adamatzky A. (Ed.) (2010), Game of life cellular automata. London: Springer

- [13] Eppstein, D. (2010), Growth and decay in life-like cellular automata. In Adamatzky A. (Ed.), Game of Life Cellular Automata, Springer, pp. 71–98
- [14] Callahan, P. (1995). Patterns, Programs, and Links for Conway's Game of Life. <http://www.radicleye.com/lifepage/>. Retrieved at February 1, 2011
- [15] Flammenkamp, A. (1998). Achim's game of life. <http://wwwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/gol.html>. Retrieved at December 12, 2011
- [16] Sayama H. (2007), Decentralized control and interactive design methods for large-scale heterogeneous self-organizing swarms. *Advances in Artificial Life*, vol. 15(1), pp. 105-114
- [17] Sayama H. (2009), Swarm chemistry. *Artificial Life*, vol. 15.1, pp. 105-114
- [18] Sayama H. (2010), Robust morphogenesis of robotic swarms. *Computational Intelligence Magazine, IEEE*, vol. 5(3), pp. 43-49