

芸術作品に見る対数螺旋の効果

The Effects of Logarithmic Spiral in Art Works

吉田美穂子

YOSHIDA Mihoko

要旨

図形を回転するとその軌跡は円となるが、等しい倍率で拡大もしくは縮小しながら回転するとその軌跡は螺旋となる。正方形の黄金比を用いた回転を基本として様々な分数の正多角形の外心を中心としてその外角の角度分を、黄金比率の割合で拡大しながら回転させてその軌跡の円弧を繋げていった結果、黄金角である約 137.5° に近い外角を持ち、分母・分子が1つ飛びのフィボナッチ数で現わされる正 $8/3$ 角形、正 $13/5$ 角形が最もバランスの良い効果的な現れ方をすることをこれまでに確かめた。また、その時の対数螺旋は $r = e^{0.20051\theta}$ の式で表され、螺旋の接線と中心からの線とがなす角度は約 78.7° であった。

本稿では $r = e^{0.20051\theta}$ の式で表される対数螺旋を例に、部分的に、あるいは全体の構図として設計されたであろう作品を挙げ、制作者が絵画を見る者に自分の意図を確実に伝えるために仕組んだ表現手法の一つであることを実証しようとするものである。

対数螺旋の効果を予測した、建築・インテリアでのデザインへの応用・転用が望まれる。

Summary

Rotate the figure and the trajectory becomes a circle. Rotate while expanding or contracting by the same magnitude and the trajectory becomes a spiral. Rotating using the golden ratio of a square is basically drafting. Rotate while expanding the external angle of the circumcenter of various fractional regular polygons by the golden ratio connects the trajectory of the arc. Comparison with the logarithmic spiral generated from drafting, confirmed an external angle of close to the golden angle of about 137.5° , demonstrating the best balanced effect of $8/3$ cornered polygon and $13/5$ cornered polygon displaying the inverted Fibonacci sequence for the denominator/numerator. The logarithmic spiral can expressed by the formula $r = e^{0.20051\theta}$, and the angles of the lines connecting to the center of the spiral were about 78.7° . The system and issues related to fractal design written about in past papers are discussed.

In this study, the author tried to investigate the creators skillfully applied and modified the logarithmic spiral in an experimental fashion to express the creators' intentions in own works which would be designed as the whole composition partially and or is mentioned taking the logarithm spiral expressed by the formula $r = e^{0.20051\theta}$ for instance.

It is hoped that the predicted effect of this expression will be applied and used in design for construction and interiors.

キーワード：分数の正多角形 対数螺旋 自己相似

Key words : Fractional Regular Polygon , Logarithmic Spiral , Self-Similarity

1. 研究の目的と背景

1.1. 同じ形が集まると螺旋が見える

正六角形を敷き詰めると図1のように対数螺旋が見える。また、2つの底辺が72°の二等辺三角形（黄金三角形と呼ぶ[注1]）の相似形を集めても対数螺旋が現れる（図2）。

なお、本稿での作図はすべてCADソフト[注2]を用いたものである。

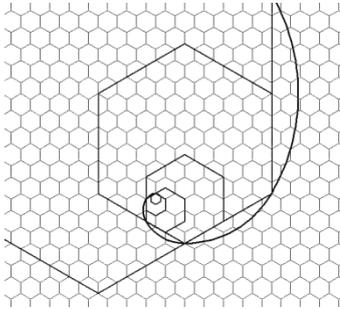


図1 合同図形の集合に現れる対数螺旋

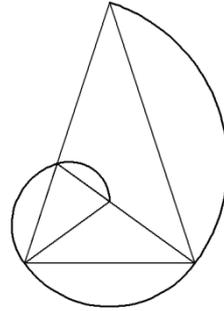


図2 相似図形の集合に現れる対数螺旋

1.2. 黄金比と黄金分割螺旋

黄金比の値を正確に求めるために「長方形から正方形を切り取ったとき、残った長方形ももとの長方形と相似になるような長方形」を考える[注3]。

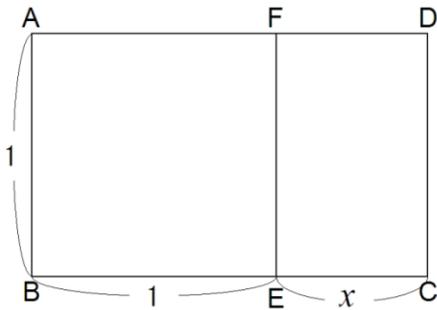


図3 黄金分割された長方形から黄金比を求める

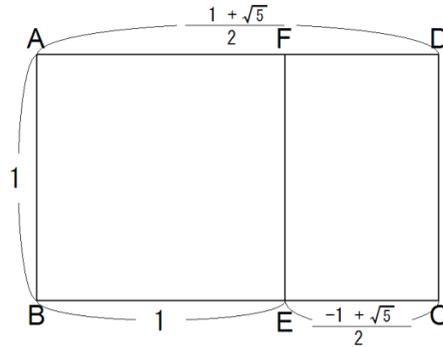


図4 黄金分割された長方形の辺の長さ

図3のように黄金分割された長方形を考えて、黄金比を求める。まず、 $AB = BE = 1$ とし、長方形ABCDとこの長方形から正方形ABEFを切り取ってできる長方形ECDFが相似であるとして、 $EC = x$ とおく。このとき、

$$AB : BC = EC : CD \text{ であるので、 } 1 : (1 + x) = x : 1$$

$$\text{よって、 } x^2 + x - 1 = 0 \quad (x > 0) \text{ となり、 } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

したがって、長方形の長辺BC(=AD)の長さは

$$BC = BE + EC = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

となり、各辺の長さは図4の通りとなる。

この黄金分割の長方形の長辺と短辺の長さの比、即ち、黄金比は ϕ （ファイ）で表され、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = 1.61803398875\dots$$

となり、この ϕ の逆数 $\phi^{-1} = 0.61803398875\dots$ も黄金比と言われている。

また、図5のように図4で円を描いて作図したものが正方形の黄金分割螺旋となる。

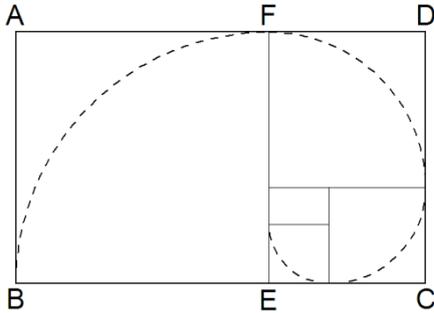


図5 正方形の黄金分割螺旋の作図1

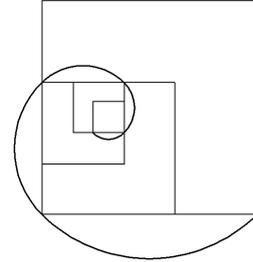


図6 正方形の黄金分割螺旋の作図2

ここで、この正方形の黄金分割螺旋の式を求める。

図5の対数螺旋は図6のように 90° (ラジアンでは $\pi/2$) 毎に ϕ 倍した対数螺旋の方程式を求めることになる。

本来、対数螺旋は作図のように急に大きくならずになめらかに拡大されるため、円ではなく、曲線で描かれるもので、極座標では $r = k e^{(\cot b)\theta}$ で表わされる (e は自然対数の底のことで $2.7182818284\dots$)。 θ は中心の角度(ラジアン)。 b は曲線の接線と中心からの線とがなす角度で、常に一定になることから対数螺旋は等角螺旋とも呼ばれる(図7)。なお、 b の値で曲線の曲がり方が決まり、値が小さいと対数螺旋は大きく開く)。拡大・縮小しても対数螺旋の形状は変わらないので、 $k = 1$ とする。

$$\theta \cot b = \ln r$$

$$\cot b = (1 / \theta) \ln r$$

θ が $\pi/2$ 回ると $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ずつ拡大していくので

$$\cot b = (2 / \pi) \times \ln(\phi)$$

$\phi = 1.61803398875$ を代入すると

$$(\pi / 2) \times \ln(1.61803398875) = 0.30634896253$$

よって、対数螺旋の式は $r = e^{0.306\theta}$

また、 $\cot b = 0.30634896253$ のとき $b = \operatorname{arccot} 0.30634896253$ であるから、 $b = 72.96760887004^\circ$ およそ 73.0° となる(表1)。

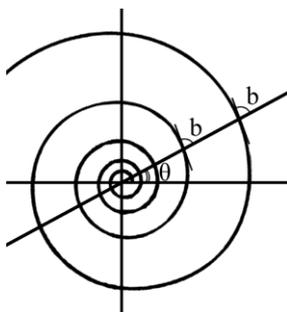


図7 対数螺旋は等角螺旋

図形名称	外角		倍率	cotb	b 度数
	度数	ラジアン			
黄金三角形	108	$3\pi/5$	ϕ	0.255	75.7
正方形	90	$\pi/2$	ϕ	0.306	73.0
正六角形	60	$\pi/3$	2	0.662	56.5

表1 対数螺旋の式と角度 b

なお、自身の関連論文[注 4]では分数の正多角形を黄金比率で拡大する時にできる螺旋を作図し、その螺旋(黄金分割螺旋)は、正 8 / 3 角形、正 1 3 / 5 角形がフィボナッチ数列と深く関係し、できるだけ辺が重ならないように予め計算されたバランスの良い出現方法を取っているという結論に至った。その対数螺旋の式は $r = e^{0.200510}$ で表され、 $b = 78.66\cdots^\circ$ となることを述べた(図 8~図 10 参照)。

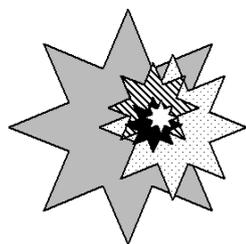


図 8 正 8 / 3 角形を 135° 回転させ、 ϕ 倍した時の現れ方

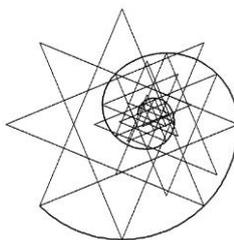


図 9 軌跡として現れる黄金分割螺旋の作図

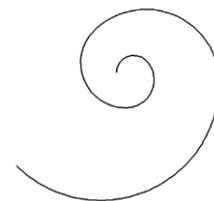


図 10 図 9 の黄金分割螺旋

2. 研究の方法

2.1. 本稿での黄金分割螺旋

本稿では図 10 の作図から得られた簡易的な螺旋ではなく、実際に計算から得られた正確な黄金分割螺旋(図 11)を用いてこれがどのように芸術作品に用いられているのかを作品と照らして明らかにしていく[注 5]。なお、この螺旋が収束する点を本稿では焦点と呼ぶことにする。図 10 では分からない焦点が芸術作品ではどのように構図として組み込まれているのかを知りたいと考え、焦点の明確な図 11 の螺旋を用いる。

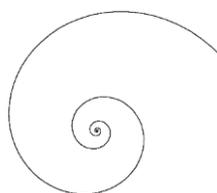


図 11 $r = e^{0.200510}$ の螺旋

2.2. 既往論文と本稿での解析方法

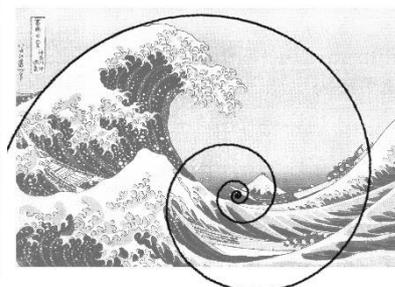
葛飾北斎「神奈川沖浪裏」[注 6]の(図 12 中央)では三井秀樹は対数螺旋が絵の所々に現れていると指摘する[注 7]。しかし、この絵画の構成を重視すると富士から出発する螺旋が三艘の船を揺らし、さらに大波を起こして画面を震撼させているように捉えられる(図 12 右)。



神奈川沖浪裏



三井秀樹の解析図



本稿における全体の螺旋解析図

図 12 葛飾北斎 富嶽三十六景「神奈川沖浪裏」

単なる静と動の対比ではなく、動かない富士を焦点として起こった波動が船を、さらに波を揺らせて動かす構図を取っていると考え。このように黄金分割螺旋を絵画に合わせていくと、部分的にも、全体的にもうねりながら制作者の意図が見る者に増幅されて伝わる手段として使用されていると考えた。この手法に則り、作品の部分的と全体の構図を構成する対数螺旋を解析する。なお、本稿では絵画と対数螺旋との合成には描画ソフト[注8]を用いた。

3. 研究の結果

(1) 伊藤若冲の「旭日鳳凰図」

雌雄の鳳凰からそれぞれ色の異なる尾羽が左上と右下に長く伸び、絵画の左下には波、右上には旭日を配し、その中間で雄鳳凰が羽根を広げている構図である[注9]。

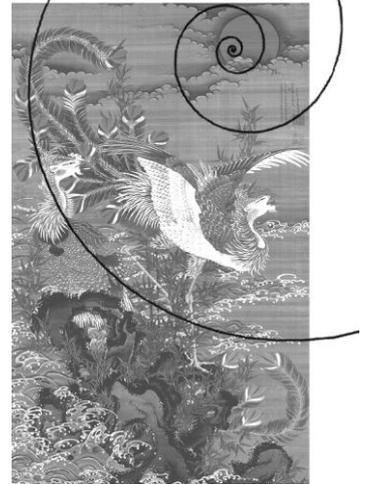
左上の尾羽(図13中央)は黄金分割螺旋を描き、全体(図13右)では旭日から発せられたエネルギーの螺旋が雄の尾羽を經由して雌の尾羽へと視線を誘導する。これは平面的に尾羽が単なる対角線に配置されているというよりも奥行きを生じさせ、真っ赤な旭日は真っ赤な尾羽の先と真っ白な体を持った雄鳳凰から雄鳳凰よりは落ち着いた色の雌鳳凰に流れ、そして雌鳳凰は静かに旭日を眺めている。



旭日鳳凰図



左上部分の解析図



全体の螺旋解析図

図13 伊藤若冲 「旭日鳳凰図」

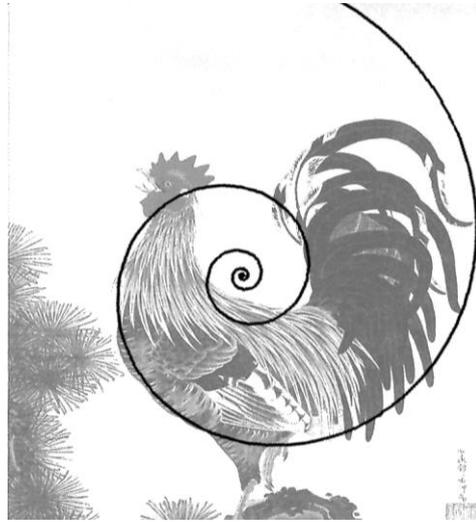
雄鳳凰は羽根を広げ、嘴を大きく開けて叫んでおり、かなり動的であるが雌鳳凰は静的である。太陽のエネルギーが生エネルギーとして雄鳳凰に達し、さらに雌鳳凰に静かに流れていく構図である。

(2) 伊藤若冲の「旭日雄鶏図」

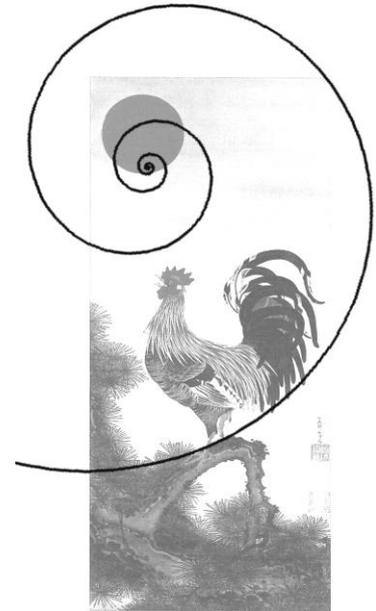
真紅の旭日に向かって、松の枝の上に止まった雄鶏が見上げている[注10]。雄鶏は毛の一本にいたるまで丁寧に描き込まれている。それに対し、松の幹や枝の描き方は少し、ぼやけた印象を与える。



旭日雄鶏図



中央部分の解析図



全体の螺旋解析図

図 14 伊藤若冲 「旭日雄鶏図」

雄鶏の形体(フォルム)は重なり合う尾羽に続き、美しい黄金分割螺旋を描く(図 14 中央)。全体では旭日から発せられたエネルギーの螺旋が雄のフォルムに沿って静かに松の枝に流れ込んでゆく(図 14 右)。

焦点である太陽のエネルギーは雄鶏にそのまま伝わり、雄鶏は生を甘受して輝き、消費されたエネルギーは溶けるように松の枝に流れ込む構図であることが分かる。

(3) 伊藤若冲の「池辺群虫図」

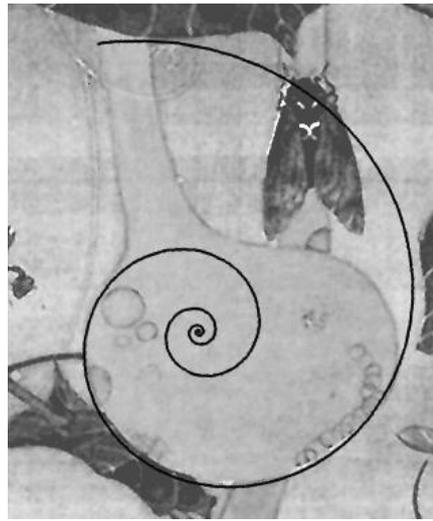
水辺に実を成らした瓢箪とそれに群がる昆虫や小動物を描いたものである[注 11]。様々な対数螺旋がこの絵には描かれているがその代表はやはり瓢箪の実(図 15 中央)である。

全体を構成する螺旋(図 15 右)に沿ってこの絵を見ていくと、まず目の前の多くの蛙が目飛び込んでくる。その蛙を見ながら進むと虫を狙う蛇に出会い、さらに瓢箪の蔓に沿って進むと絵からかなり離れていくが確かに池の縁に沿って歩んでいるかのように大きく曲がってまた、この絵の中に入り、それから獲物を狙う昆虫を横目に見て、そのまま瓢箪の葉の虫食いの穴の中に入って消えていく。

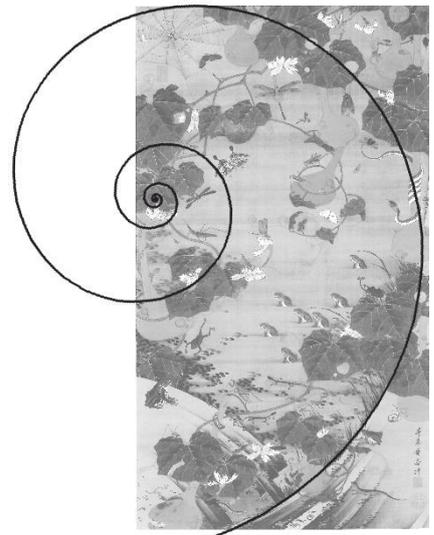
池の周辺を散策している内に様々な昆虫に出会い、そこには様々な生き物のドラマがあり、その道は瓢箪の虫食い穴(焦点)に収束していくという構図が読み取れる。



池辺群虫図



左上部分の解析図



全体の螺旋解析図

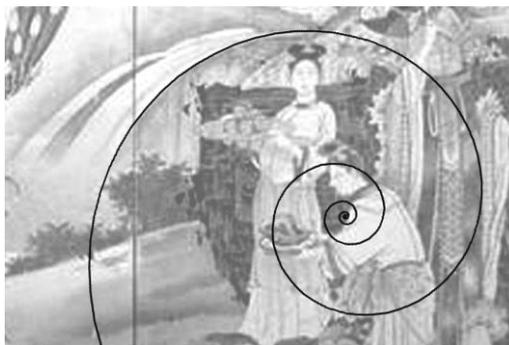
図 15 伊藤若冲 「池辺群虫図」

(4) 曾我蕭白の「群仙図屏風」

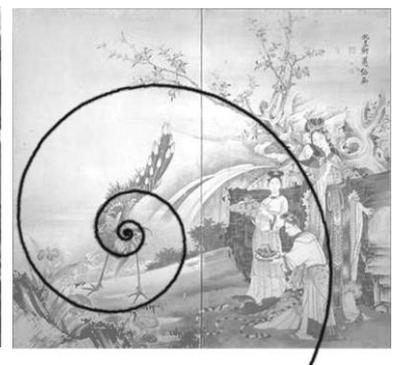
口を開けて叫んでいるようなハゲタカのような動物が鳳凰で、図 13 の若冲の鳳凰とはかなり荘厳さにおいて差異がある。この鳳凰は何かを叫び怒っているかのように睨んでいる[注 12]。図 16 中央 では流れる水が滝のように対数螺旋のアーチを形作る。図 16 右 では螺旋は荒ぶる神である鳳凰の体内から発し、そのフォルムをたどり桃の樹の枝に沿って西王母（せいおうぼ、さいおうぼ）に流れ、さらに鳳凰に供物を捧げる侍女をかすめて地面に届く。西王母も侍女も表情は穏やかで、にこやかに鳳凰を見ている。長寿の象徴である西王母に桃の樹が鳳凰から発せられた怒りを祈りのエネルギーを変化させて届けたような構図となっている。



群仙図屏風



右下部分の解析図



全体の螺旋解析図

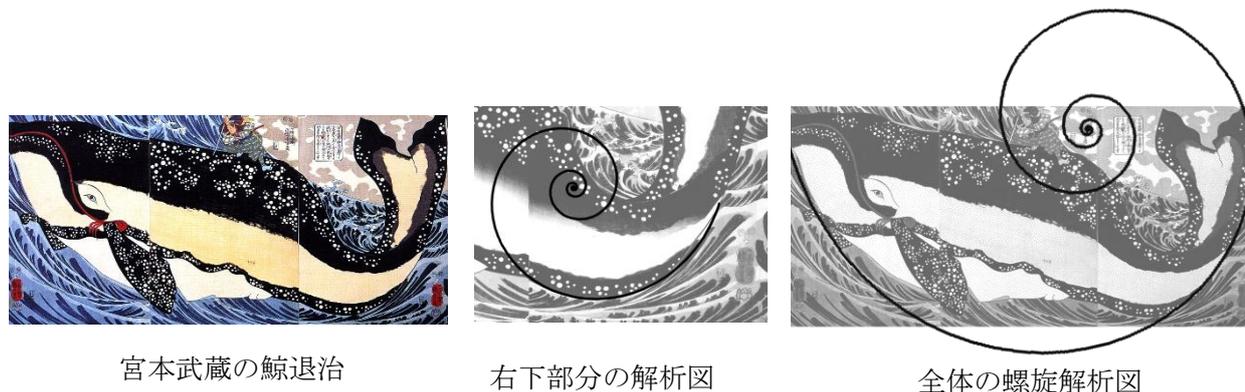
図 16 曾我蕭白 「群仙図屏風」

(5) 歌川国芳の「宮本武蔵の鯨退治」

3枚の画面一杯に小さな宮本武蔵が大きな鯨の背にまたがって乗り、鯨に剣を突き立てている多色刷木版画である[注13]。海は荒れ、空には暗雲が立ち込めている中での死闘を描いている。武蔵の表情は自信に満ちているようである。図17中央では荒波が黄金分割螺旋で、図17右では鯨のフォルムに沿って螺旋が流れ、大きく画面を踏み出してそれは国芳自身の画号「一勇斎国芳」に収束する。

ではなぜ螺旋の焦点に自分自身の画号を置いたのかが問題となる。

この画は武蔵の修業時代の伝説の一つと言われており、実際にはなかったことである。その架空の空間に波と空のリアリティと迫力を存在させ、作者自身がそれを背後から実際に見ていたような臨場感溢れるエネルギーを、この絵を見る者に向けて発信したものではないかと考える。



宮本武蔵の鯨退治

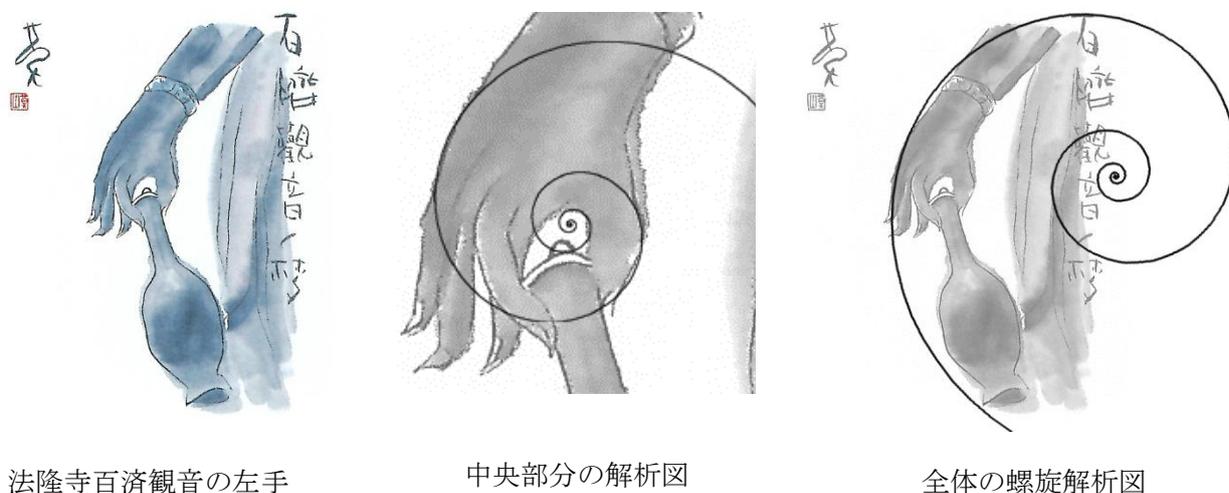
右下部分の解析図

全体の螺旋解析図

図17 歌川国芳 「宮本武蔵の鯨退治」

(6) 榊莫山の「法隆寺百済観音の左手」

法隆寺の百済観音は榊莫山が一番好きだと言った仏である。日本一スリムで、容姿すがすがしく、手首にはめたブレスレットも腕に巻いたアームレットも天女さながらであると絶賛する。その榊莫山が百済観音の左手に注目した[注14]。柔らかい手の甲から続いて、水瓶（すいびょう）を軽くつまんだ親指と人差し指に囲まれる空間にながれる曲線は黄金分割螺旋である(図18中央)。また、水瓶をも含めて全体を見てみると(図18右)水瓶の底から手の甲、ブレスレットへ螺旋は流れ、観音の体内に収束する。わざわざ「百済観音ノ夢(ゆめ)」と書かれた「観音」の字の中へと入っていく。その様子を画号「莫」は外から静かにじっと見ているような構図である。



法隆寺百済観音の左手

中央部分の解析図

全体の螺旋解析図

図18 榊莫山 「法隆寺百済観音の左手」

(7) ミュシャの『「巻煙草用紙ジョブ」のポスター(小)』

この作品は巻きタバコ用紙を製造するジョセフ・バルドゥー社の宣伝用ポスターとして制作されたリトグラフ作品である[注 15]。「JOB」というのはジョセフ・バルドゥー(Joseph Bardou)の”Jo”と”B”をとったものである。その文字を隠すように女性は右手にタバコを持ち、煙を画面の上までジグザグにくゆらせている。女性の髪の毛は金色で、黄金分割螺旋を描く(図 19 中央)。また、女性の前髪は大胆に反り返り、「0」の字を半分隠すように描かれている。図 19 右 では、その誇張された前髪から対数螺旋は延び、「0」の字とタバコの煙を通り、やわらかな手首から肘に沿って、さらに大胆にカールした巻き髪の中へと続く。焦点は彼女の胸元(心臓)あたりである。

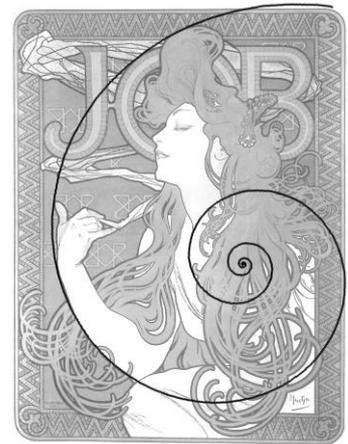
しかも巻きタバコ用紙を製造するジョセフ・バルドゥー社のロゴ「JOB」を覆い隠すように女性を前面に出し、うっとりとした表情で豊かな巻き髪的女性がタバコを吸って至福の瞬間を味わっている。タバコの煙も巻き髪も大胆で、ミュシャの描く「生を謳歌する艶やかな女性像」を黄金分割螺旋は確実に強調している。



「巻煙草用紙ジョブ」
のポスター(小)



右下部分の解析図



全体の螺旋解析図

図 19 ミュシャ 『「巻煙草用紙ジョブ」のポスター(小)』

また、心臓は新しい血液を送り出す一方、全身を巡った古い血液を集める。口からはタバコを吸引し、煙を吐き出す。そのことを勘案すると、このリトグラフでは螺旋は焦点に向けて収束するとともに、焦点から流出するリズムが生じる。よって、焦点である心臓から発せられた生のエネルギーは女性の髪を巻き込みながら肘から手首、さらに前髪をも巻き上げて空気中に拡散され、口からはタバコの煙がジグザグの軌跡を残して空中に発散していく。そのエネルギー源の女性は静かに満ち足りた時間を満喫しているという構図となる。即ち、女性の鼓動から発したエネルギーは髪をカールさせ、前髪を反らせてタバコの煙とともに空中に放たれる一方、タバコの吸引により外からのエネルギーを吸収して自分を輝かせる。鼓動と呼吸のリズムは生ある限り繰り返され、その中で女性はひと時の幸福な時間を味わっている。

3. 考察

全体を構成する黄金対数螺旋の形体を実際に芸術作品に合わせてみると、様々なエネルギーの変化や表現の差異を工夫して制作者は見る者に訴えていた。

それには以下の表現手法を駆使したものであると考える。

- ① 動かない焦点から出発してそれを動の回転エネルギーに変えて次第にエネルギーを拡大していく (図 12)
- ② 高いエネルギーの焦点から出発してエネルギーを直接伝えるターゲットを明確にしておいてからエネルギーを拡散する (図 13、図 14)
- ③ 螺旋の外側(見る者の立ち位置に近い所)から絵の世界に誘導し、絵の世界を展開した後、見る者とともに焦点へと引きずり込む。(図 15、図 18)
- ④ 高いエネルギーの焦点から出発してエネルギーを途中で変換する。(図 16)
- ⑤ 実際にはない状況にリアリティを出すために制作者自身が焦点に登場する。(図 17)
- ⑥ 螺旋の外側(見る者の立ち位置に近い所)から絵の世界に誘導し、最もエネルギーの高い焦点に行きつくとともに、エネルギーの高い焦点から出発して周りを巻き込みながら空気をも震撼させて拡散していく。それは命の限り無限に繰り返す。(図 19)

今回の研究で以下の見解を得た。

黄金分割螺旋は竜巻に例えることができると考える。発達した積乱雲に伴う強い上昇気流によって発生する激しい渦巻きは短時間に猛スピードで様々なものを巻き上げながら移動する。さらに発達した積乱雲の付近では、竜巻だけでなく、ダウンバースト(積乱雲から吹き降ろす下降気流が地表に衝突して水平に吹き出す激しい風)やガストフロント(積乱雲の下で形成された冷たい(重い)空気の塊が、その重みにより温かい(軽い)空気の側に流れ出すことによって発生する激しい風)等の突風が生じる。高いエネルギーを持った竜巻は周りを巻き込みながら成長し、やがて消滅する。竜巻に襲われた町はかなり変貌する。それを目の当たりにした者にとっては大きな衝撃となる。

芸術作品の全体を構成する構図である螺旋は竜巻そのもので、その周辺には突風による対数螺旋が様々な形体で発生し、画面がねじれ、揺れる。ある種の臨場感を持って、迫力と偉大なエネルギーを制作者は作品の世界に創造する。その作品に対峙して作品を見る者にとっては迫りくる脅威であり、また同時に精神的打撃を受けることになる。そして愕然となった瞬間、制作者の意図は確実に作品を見る者に伝わる。制作者はそれを予測し、巧みに表現手法の一つとして対数螺旋の構図を設計すると考える。

4. まとめと展望

分数の正多角形をその外角の角度で黄金比率の割合で拡大しながら回転させて作図した結果、黄金角である約 137.5° に近い外角を持つ、1つ飛びのフィボナッチ数で現わされる正 $8/3$ 角形、正 $13/5$ 角形が最もバランスの良い効果的な現れ方をすることを自身の関連論文で確かめた。また、その時の軌跡である黄金分割螺旋は $r = e^{0.200510}$ の式で表され、その時の螺旋の接線と中心からの線とがなす角度 b (図 7 参照)は約 78.7° である。

この黄金対数螺旋の形体が芸術作品にどのように利用されているのかを本稿で究明した。実際に芸術作品に照合していき、解析した。螺旋の焦点はエネルギーの源でもあり、消失点でもあった。また、螺旋の形状は一方向での増幅伝達でもあり、プラスマイナスの変換をもなし得るものであった。また、焦点に自分自身(画号)を置いて臨場感を出し、画号の位置により作品の見え方、見せ方が変化するということも分かった。作品の制作者は黄金分割螺旋を利用して自分の作成意図を見る者に確実に届けていた。

本稿は解析結果が明確な事例を報告するものであるが、特に若沖は対数螺旋を様々な利用しており、今後いろいろな角度からの解析を試みていく必要があると考えている。

また、この手法を使った建築・インテリアにおけるデザインへの応用をも視野に入れて研究を進めていきたい。

謝辞

本研究を進めるに当たり、大阪市立大学の釜江哲朗氏に助言をいただきました。ここに記して感謝いたします。なお、本研究は JSPS 科研費 25350035 の助成を受け、報告するものです。

注および参考文献

- 1) マリオ・リヴィオ, 齊藤隆央:黄金比はすべてを美しくするか?, 早川書房, 107, 2012
- 2) CAD ソフト 「VectorWorks 2016」 エーアンドエー株式会社
- 3) 佐藤修一:自然にひそむ数学, 講談社, 71-74, 2003
- 4) 吉田美穂子:分数の正多角形と対数螺旋の表出効果, 梅花女子大学看護保健学部紀要, 7, 35-43, 2017
- 5) 関数グラフソフト 「GRAPES 7.70」 友田勝久
- 6) 葛飾北斎:神奈川沖浪裏 江戸時代 木版多色刷 葛飾北斎美術館
引用…神谷浩:葛飾北斎, 新潮社, 39, 2010
- 7) 三井秀樹:形之美とは何か, 140, 日本放送出版協会, 2009
- 8) 描画ソフト 「PhotoShop CS6」 アドビシステムズ社
- 9) 伊藤若冲:旭日鳳凰図 江戸時代 彩色画 宮内庁三の丸尚蔵館
引用…京都国立博物館:皇室の名宝, 96, 読売新聞社, 2020
- 10) 伊藤若冲:旭日雄鶏図 江戸時代 彩色画 宮内庁三の丸尚蔵館
引用…伊藤若冲:ちいさな美術館 伊藤若冲, 29-30, 株式会社青幻舎, 2011
- 11) 伊藤若冲:池辺群虫図 江戸時代 彩色画 宮内庁三の丸尚蔵館
引用…東京国立博物館:皇室の名宝-日本美の華, 66, 読売新聞社, 2009
- 12) 曾我蕭白:仙人図屏風 江戸時代 紙本墨画金泥引 東京芸術大学大学美術館
引用…狩野博幸:曾我蕭白, 48, 新潮社, 2011
- 13) 歌川国芳:宮本武蔵の鯨退治 江戸時代 多色刷木版画 個人所蔵
引用…コロナ・ブックス編集部:日本の美 100, 94-95, 平凡社, 2008
- 14) 榭莫山:法隆寺百済観音の左手 水墨画 所蔵不詳
引用…コロナ・ブックス編集部:日本の美 100, 50, 平凡社, 2008
- 15) アルフォンス・ミュシャ:「巻き煙草用紙ジョブ」のポスター(小) 1896年 リトグラフ ミュシャ美術館(チェコ)
引用…Alphonse Mucha:Le Petit Musée Alphonse Mucha, 47-48, 株式会社青幻舎, 2013